

UNIVERSIDADE DO ALGARVE  
ÁREA DEPARTAMENTAL DE FÍSICA  
LABORATÓRIO DE PROCESSAMENTO DE SINAIS

---

MODELOS DE PROPAGAÇÃO ACÚSTICA SUBMARINA:  
COMPARAÇÃO DE RESULTADOS COM A SOLUÇÃO  
ANALÍTICA DO PROBLEMA DE 3 CAMADAS

---

ORLANDO CAMARGO RODRÍGUEZ

UNIVERSIDADE DO ALGARVE, FARO  
1995



UNIVERSIDADE DO ALGARVE

UNIDADE DE CIÊNCIAS EXACTAS

Modelos de Propagação Acústica Submarina:  
comparação de resultados com a solução  
analítica do problema de 3 camadas

**Orlando Camargo Rodríguez**

ÁREA DEPARTAMENTAL DE FÍSICA

LABORATÓRIO DE PROCESAMENTO DE SINAIS (SiPLAB)

Trabalho de síntese relativo às provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica requeridas pelo assistente estagiário, Orlando Camargo Rodríguez, ao abrigo da alínea b) número 2 do artigo 58 do ECDU.

GAMBELAS, DEZEMBRO DE 1995



# Agradecimentos

Gostaria de expressar o meu sincero agradecimento a todos os colegas, especialistas e amigos, cuja experiência, críticas constructivas e ajuda desinteressada me permitiram resolver, duma maneira eficaz, os diversos problemas que de uma ou de outra maneira surgiram ao longo da elaboração deste material. Não posso, no entanto, deixar de destacar, entre aqueles, o Prof. Dr. Sérgio Jesus, que com o constante apoio da sua vasta experiência e excelentes qualidades profissionais e humanas favoreceu a minha aprendizagem e incentivou a pesquisa necessária à concretização deste trabalho.



# Resumo

Os diferentes Modelos de Propagação de sinais acústicos no meio oceânico têm sido amplamente utilizados desde o início da década dos 70, com o objectivo fundamental de predezir uma série de aspectos, tanto teóricos como práticos, do problema de propagação nos mais variados cenários e condições. A principal diferença entre modelos encontra-se relacionada com o tipo de aproximação utilizada para resolver a Equação de Helmholtz, embora os factores particulares de implementação joguem igualmente uma determinada importância. Este trabalho constitui uma síntese dos aspectos mais fundamentais da Teoria Acústica Submarina e das bases teóricas dos Modelos de Propagação (Capítulos 2 e 3 respectivamente), assim como uma análise da precisão dos resultados fornecidos por cada modelo, quando confrontados com os resultados da solução analítica dum problema específico de propagação (Capítulo 4). As conclusões, expostas no último capítulo, descrevem detalhadamente diferentes aspectos da aplicação de cada modelo: o NMM KRAKEN, que permite obter uma representação precisa do campo acústico em termos da solução modal; o PE FEPE e a sua dependência dos parâmetros de discretização do meio e das condições iniciais (os starters); a representação do campo acústico usada pelo FFP SAFARI e que permite uma descrição completa da perturbação dada, essencialmente na proximidade da fonte; e o RTM BELLHOP com a sua representação direccional da pressão acústica. Estas conclusões podem servir de guia para otimizar a escolha dum dado Modelo de Propagação, de acordo com as características específicas do problema a ser analisado.



# Conteúdo

Agradecimentos	I
Resumo	III
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Noções Fundamentais da Teoria Acústica Submarina</b>	<b>5</b>
2.1 A Equação de Onda . . . . .	5
2.2 A Velocidade de propagação . . . . .	7
2.3 Condições físicas . . . . .	9
2.4 As perdas de transmissão . . . . .	10
2.5 Atenuação . . . . .	10
2.6 Dispersão . . . . .	11
<b>3 Modelos de Propagação</b>	<b>13</b>
3.1 Modelos Traçadores de Raios ( <i>RTM – Ray Trace Models</i> ). . . . .	13
3.2 Modos Normais ( <i>NMM – Normal Mode Models</i> ). . . . .	18
3.3 A Equação Parabólica ( <i>PE – Parabolic Equation</i> ) . . . . .	21
3.4 Modelos de Campo Rápido ( <i>FFP – Fast Field Program</i> ). . . . .	25
3.5 Implementação e Exemplos . . . . .	26
<b>4 Comparação de Modelos</b>	<b>41</b>
4.1 Solução Analítica do Problema de 3 camadas . . . . .	42
4.2 Implementação da Solução Analítica . . . . .	45
4.3 Comparação . . . . .	47
<b>5 Conclusões</b>	<b>61</b>
<b>Referências</b>	<b>65</b>
<b>I Comentários sobre Funções Especiais</b>	<b>69</b>
I.1 As funções de Bessel . . . . .	69
I.2 As funções de Airy . . . . .	70
<b>II Métodos Numéricos usados nos modelos de propagação</b>	<b>75</b>
II.1 O método de Crank–Nicolson . . . . .	75
II.2 O método de Galerkin . . . . .	77

<b>III Métodos para o cálculo das raízes duma função</b>	<b>81</b>
III.1 O método de bissecção . . . . .	81
III.2 Método das aproximações sucessivas ( ou de iteração) . . . . .	82
III.3 Método das cordas . . . . .	82
III.4 Método das tangentes ( ou método de Newton ) . . . . .	83

# Capítulo 1

## Introdução

Uma das propriedades mais importantes dos oceanos reside na sua alta sensibilidade à propagação de sinais acústicos com frequências compreendidas entre 1 Hz e 20 kHz [1] que, a diferença de todos os tipos de radiação electromagnética, permitem reunir uma quantidade significativa de informação a grande e pequena escala sobre o meio marinho. O som tem sido extensivamente usado na detecção activa e passiva de barcos e submarinos [2, 3], estudos sísmicos [4] imagens de alta resolução [5], comunicações [6] e tomografia acústica [7, 8, 9]. As transmissões de sinais acústicos de baixa frequência [10] têm vindo a ser propostas como meio de vigilância das mudanças globais de temperatura [11], enquanto que o som gerado de maneira espontânea pelo meio marinho poderia ser de grande utilidade na previsão das mudanças climáticas, incluindo a frequência das chuvas sobre o oceano [12]. No início da década de 70 as grandes capacidades de cálculo, proporcionadas pelo progresso da técnica computacional, deu início ao desenvolvimento de modelos numéricos, em particular aplicados ao estudo da propagação acústica no oceano. Os modelos acústicos submarinos têm como objectivo fundamental simular, numa grande variedade de casos, a propagação da onda acústica, possibilitando assim a predição das características mais importantes deste fenómeno. Independentemente do êxito atingido no desenvolvimento dos modelos de propagação do som

no meio marinho [13], não podemos deixar de constatar uma série de limitações inerentes a esses mesmos modelos. Essas limitações tanto podem ter a ver com a descrição do meio em questão (escala local ou global, variação da profundidade com a distância, meios de 2 ou 3 dimensões) como com a descrição da dispersão, a qual pode ser originada por variadas razões (irregularidades na superfície do mar ou do leito marinho, a presença na água de substâncias de origem natural ou artificial, etc.). Igualmente difíceis de inserir são os problemas de *ruido ambiente* [1] (o som originado pela turbulência oceânica, navios, vento, ondas, actividade de microorganismos, etc.) e *reverberação* [14] (os ecos relacionados com a dispersão do som nas heterogeneidades do meio). Em casos específicos a resolução analítica da equação de onda [15] possui a vantagem de descrever de um modo exacto o fenómeno de propagação, podendo servir como padrão de comparação para avaliar a precisão dos resultados do modelo numérico.

Este trabalho pretende não só agrupar aquilo que podem ser considerados os aspectos teóricos mais relevantes da Acústica Submarina, em conjunto com os modelos mais conhecidos de propagação, como também proceder a uma comparação detalhada das predições dos modelos, usando como padrão comparativo uma solução analítica dum caso particular de propagação. A teoria e os modelos serão comentados nos Capítulos 2 e 3, a solução analítica e as comparações encontram-se no Capítulo 4. Finalmente no Capítulo 5 chegamos a algumas conclusões a partir dos resultados obtidos no Capítulo anterior. Os apêndices inseridos na parte final têm como objectivo esclarecer alguns detalhes sobre funções especiais e métodos numéricos usados em alguns dos modelos. Embora a informação contida nestes apêndices possa ser encontrada com relativa facilidade nos manuais de Métodos Numéricos e Métodos da Física Matemática, a sua inclusão neste trabalho permite obter uma visão mais comple-

ta, não só dos aspectos formais do problema, mas também dos aspectos práticos, e mais concretamente da resolução das equações que são obtidas no contexto da solução aplicada.



# Capítulo 2

## Noções Fundamentais da Teoria Acústica Submarina

Todo e qualquer problema físico necessita, para um seu estudo apropriado, duma série de premissas de carácter físico e matemático: os assim chamados *fundamentos* da teoria. Dedicaremos este Capítulo à exposição ordenada dos aspectos básicos mais importantes do problema de propagação, de modo a facilitar a exposição posterior sobre os modelos mais usados na simulação da propagação acústica no oceano.

### 2.1 A Equação de Onda

O problema físico em estudo consiste em obter a resposta do meio oceânico à presença duma fonte isotrópica pontual de amplitude unidade, resposta essa que deverá obedecer à equação de onda (abreviadamente EO) [16]:

$$\rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -s(t) \delta(z - z_s) \frac{\delta(r)}{2\pi r} . \quad (2.1)$$

Os diferentes parâmetros envolvidos na EO são:

$P$	– Pressão acústica,
$z, r, \theta$	– profundidade dirigida da superfície para o fundo, distância horizontal e azimut,
$t$	– tempo,
$s(t)$	– função que caracteriza a fonte isotrópica,
$z_s$	– profundidade da fonte,
$\rho = \rho(z)$	– densidade do meio,
$c = c(r, z, \theta)$	– velocidade de propagação do som ( <i>ou perfil de velocidade</i> ),

e

$$\nabla = \mathbf{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{u}_z \frac{\partial}{\partial z} , \quad (2.2)$$

corresponde ao operador vectorial nabla em coordenadas cilíndricas.

Para um sinal harmónico de frequência  $\omega$  podemos considerar

$$s(t) = e^{-i\omega t} , \quad (2.3)$$

logo a solução da EO pode ser representada na forma

$$P(r, z, \theta, t) = p(r, z, \theta) e^{-i\omega t} , \quad (2.4)$$

e substituindo em Eq.(2.1) obteríamos:

$$\rho \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{c^2} p = \delta(z - z_s) \frac{\delta(r)}{2\pi r} . \quad (2.5)$$

Esta equação é denominada por *equação de onda reduzida* ou, mais comumente, *equação de Helmholtz* (EH). Desprezando a dependência de  $\theta$  podemos obter a equação:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} p = \delta(z - z_s) \frac{\delta(r)}{2\pi r} , \quad (2.6)$$

que constitui o ponto de partida dos modelos de propagação a 2 dimensões. Conjuntamente com a EH devemos considerar ainda outros elementos do problema de acústica submarina, seguidamente expostos.

## 2.2 A Velocidade de propagação

A medição directa de  $c(r, z)$  na coluna de água pode ser realizada com a ajuda de velocímetros, os quais fornecem informação com uma margem de erro até 0,3 m/s. Alternativamente pode-se medir a temperatura e a salinidade da água para diferentes valores da profundidade. Os valores obtidos permitem reconstruir o perfil de velocidade, com ajuda de fórmulas empíricas, como por exemplo a fórmula de Mackenzie [2]:

$$\begin{aligned}
 c = & 1448.96 + 4.591T - 5.304 \times 10^{-2}T^2 + 2.374 \times 10^{-4}T^3 + 1.340(S - 35) \\
 & + 1.630 \times 10^2 D + 1.675 \times 10^{-7} D^2 \\
 & - 1.025 \times 10^{-2} T(S - 35) - 7.139 \times 10^{-13} T D^3 ,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde  $S$ ,  $T$  e  $D$  são os valores de salinidade ( em permilagem ), temperatura ( dada em graus Celsius ) e profundidade em metros. A grande variedade de perfis de velocidade  $c(z)$  observados ( *ver fig. 2.1 e 2.2* ) é consequência das diferentes combinações de  $S$ ,  $T$  e  $D$ .

Como mostram os dados experimentais, as variações radiais de  $c$  costumam ser mais fracas do que as variações verticais em profundidade, o que em muitos casos simplifica enormemente a teoria. Isto permite aproximar analiticamente, e com grande precisão, alguns dos perfis de velocidade como funções de  $z$ . Um exemplo é o perfil de Munk ( ou perfil de *águas profundas*, i.e. meios em que  $D > 200m$  ) [13]:

$$c(z) = c_1 [1 + \epsilon (\eta + e^\eta - 1)] , \tag{2.8}$$

onde  $\epsilon = 7.4 \times 10^{-3}$ ,  $\eta = 2(z - z_1)/B$ ,  $B = 1,3$  km,  $c_1$  é um parâmetro de referência e  $z_1$  corresponde à profundidade onde tem lugar o mínimo de  $c(z)$ . A presença dum ou vários mínimos pode ter como consequência a formação de canais de propagação (os chamados

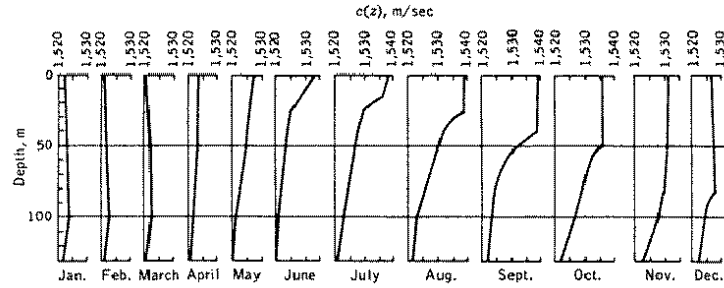


Figura 2.1: Perfis de velocidade na área das Bermudas (*Ref. [1]*).

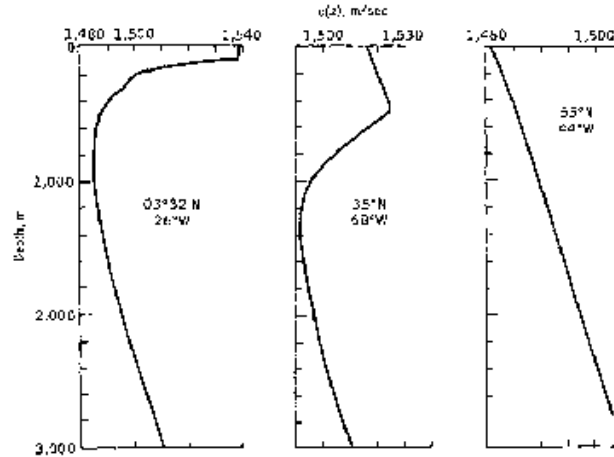


Figura 2.2: Perfis de velocidade na área do Atlântico Norte (*Ref. [1]*).

*SOFAR channels*) [13], ou seja, de zonas da coluna de água onde a propagação do sinal acústico é mais favorecida.

As medições de  $c$  no fundo marinho podem ser realizadas com ajuda de amostras obtidas no lugar de interesse, como mostra a figura 2.2. Nela pode-se ver a estrutura do sedimento, a sua densidade e velocidade de propagação. As zonas em negro correspondem a uma mistura de materiais orgânicos (limo) e argila, enquanto que as zonas granuladas representam areia. Pelo tipo de estrutura observada pode-se intuir qual será o factor predominante de dispersão em cada amostra: a presença das várias interfaces em *B3* contra as variações não homogêneas de densidade e de  $c(z)$  ao longo de toda a camada principal em *P40*. Como mostrado pela simulação numérica [18,19], a existência dum nível sedimentário de separação entre a coluna de água e o fundo marinho pode ser de importância decisiva no regime de propagação.

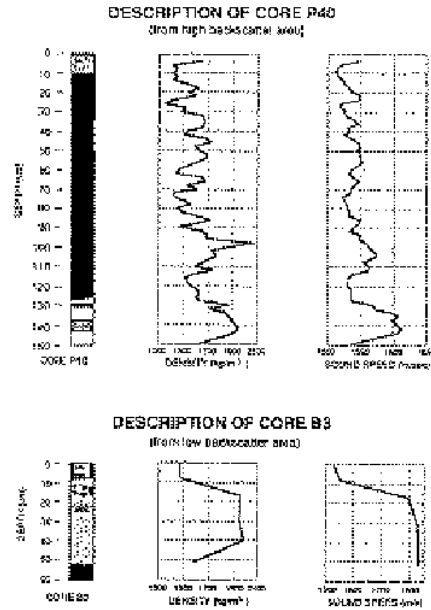


Figura 2.3: Amostras do sedimento marinho da baía de Monterey, Califórnia (Ref. [17]).

No leito rochoso, pode ter lugar a propagação de ondas de dois tipos [1, 17]: *compressionais* e *laminares* com velocidades  $c_p$  e  $c_s$  respectivamente. Do ponto de vista físico estas ondas distinguem-se pelo tipo de oscilações do meio: longitudinais no sentido de propagação na primeira; transversais na segunda. Pode demonstrar-se que  $c_s < c_p\sqrt{3/4}$ .

Os parâmetros de atenuação das ondas compressionais e laminares dependem das propriedades físicas e geológicas da camada rochosa (ou do sedimento) e precisam de ser determinados por via experimental.

## 2.3 Condições físicas

- Condições de Fronteira ( CF ): As condições de fronteira costumam classificar-se segundo a interface que divide os meios em contacto:

1. *Gás-Líquido*: Fronteira livre de pressão ( CF de Dirichlet ):

$$p(0, r) = 0 . \quad (2.9)$$

2. *Líquido-Sólido não elástico*: Fronteira perfeitamente rígida (CF de Neumann):

$$\frac{\partial p}{\partial z}(D) = 0 . \quad (2.10)$$

3. *Líquido-Líquido ou Líquido-Sólido elástico*: Condições Acústicas (CF de Robin):

$$\begin{aligned} p_1(D, r) &= p_2(D, r) \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z}(D) &= \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z}(D) . \end{aligned} \quad (2.11)$$

• Condição de Radiação (CR):

$$p(z, r \rightarrow \infty) \sim e^{-ikr} . \quad (2.12)$$

O sentido físico da CR é evidente por si próprio, mas é indispensável sublinhar um seu aspecto particular: num meio em que a profundidade  $z$  diminui com a distância  $r$ , pode existir reflexão da onda acústica em sentido contrário ao sentido original de propagação. Essa reflexão não é tomada em conta na CR.

## 2.4 As perdas de transmissão

Uma vez determinada  $p(r, z)$  calculam-se as perdas de transmissão:

$$TL(r, z) = -20 \log_{10} \left| \frac{p(r, z)}{p_0} \right| , \quad (2.13)$$

em que  $p_0$  é um factor de normalização e representa a pressão acústica a 1 metro de distância da fonte. Usualmente considera-se o valor

$$p_0 = \frac{1}{4\pi} . \quad (2.14)$$

## 2.5 Atenuação

Para o cálculo das perdas por absorção na coluna de água podemos usar a fórmula de atenuação [ 16 ]:

$$\alpha = \frac{40f^2}{4100 + f^2} + \frac{0,1f^2}{1 + f^2} , \quad (2.15)$$

em que  $f$  é dado em kHz e  $\alpha$  em dB/m. Para um valor característico de  $f = 100 \text{ Hz} = 0,1 \text{ kHz}$  teríamos  $\alpha = 1,1 \times 10^{-3} \text{ dB/m}$ . Assim para uma distância de 10 km o  $TL$  causado por absorção seria aproximadamente de 1 dB, valor que pode ser desprezado em relação aos valores usualmente obtidos nos mais variados casos de propagação. A atenuação no sedimento e no leito rochoso é mais complicada de determinar, sendo necessário recorrer aos valores experimentais. A introdução na EH duma velocidade complexa:

$$c(z) = c_r(z) + ic_i(z) ,$$

permite a análise teórica dos mecanismos correspondentes a perdas.

## 2.6 Dispersão

Costuma-se distinguir entre dois tipos diferentes de dispersão:

1. a dispersão *determinística*, causada pelas variações a grande escala da batimetria do fundo ou das camadas, e neste caso é necessário adaptar a solução da EH às características do relevo, e
2. a dispersão *estocástica*, causada quer pela distribuição aleatória de pequenas irregularidades ao longo das interfaces entre diferentes camadas do meio, quer pela presença de impurezas e bolhas de ar na água do mar. Cada um destes factores é tratado de forma diferente. No caso das interfaces resulta possível modificar as CF com ajuda da teoria das perturbações ou introduzindo um valor médio de irregularidade [16]. No caso de heterogeneidades de pequena escala pode-se introduzir uma secção efectiva de dispersão  $\sigma$  que é tomada em conta no cálculo da pressão acústica [18].

Independentemente do êxito alcançado no estudo duma grande variedade de casos específicos de dispersão, a complexidade e as características do problema não têm permitido o desenvolvimento duma teoria geral que, numa única base, permita analisar o fenómeno de dispersão a grande e pequena escala.

# Capítulo 3

## Modelos de Propagação

Denomina-se formalmente por *Modelo de Propagação* toda a solução da EH, tomada em conjunto com as condições físicas apropriadas, e que permita fazer previsões a respeito do regime de propagação numa variedade significativa de casos. Neste capítulo analisaremos quatro modelos de propagação, indicando as suas vantagens e limitações com ajuda de alguns exemplos concretos.

### 3.1 Modelos Traçadores de Raios ( *RTM – Ray Trace Models* ).

Consideremos a seguinte solução da equação Eq.(2.5) ( considerando  $\rho = \text{constante}$  ):

$$p = Ae^{iS} , \quad (3.1)$$

em que  $A$  e  $S$  representam respectivamente a amplitude e a fase da onda de pressão acústica (a função  $S$  recebe o nome de *Eikonal* [19]). Substituindo em Eq.(2.5) para o caso homogéneo, e separando as partes real e imaginária, podemos obter as equações:

$$\frac{1}{A} \nabla^2 A - (\nabla S)^2 + k^2 = 0 , \quad (3.2)$$

e

$$2(\nabla A) \cdot \nabla S + A \nabla^2 S = 0 , \quad (3.3)$$

onde  $k = \omega/c(x, y, z)$ . Considerando  $S$  uma função que varia com maior intensidade do que  $A$  podemos supor que:

$$(\nabla S)^2 \gg \frac{\nabla^2 A}{A}, \quad (3.4)$$

pelo que em lugar da Eq.(3.2) deveremos obter a equação:

$$(\nabla S)^2 = k^2, \quad (3.5)$$

que é denominada *equação da Eikonal* [1, 19].

Tendo em conta a variação rápida da Eikonal pode considerar-se que as superfícies para  $S = \text{constante}$  correspondem às *frentes de onda*, enquanto que as normais a estas correspondem aos raios de propagação. Sendo assim, para um meio arbitrário caracterizado por um vector de propagação  $\mathbf{k}$  podemos escrever que:

$$\nabla S = \mathbf{k} \quad (3.6)$$



Figura 3.1: Raios de propagação num meio anisótropo, Ref [ 21 ].

Se considerarmos dois pontos  $A$  e  $B$  num mesmo raio ( ver figura 3.1 ) teremos que:

$$\int_A^B \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla S \cdot d\mathbf{r} = S(B) - S(A), \quad (3.7)$$

não dependendo este integral da trajectória de propagação. Consequentemente, para qualquer curva  $D$  que ligue  $A$  e  $B$  teremos que:

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} \leq \int_{D_{AB}} k dl. \quad (3.8)$$

Agora, não é difícil ver que:

$$\int_A^B \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B k \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \omega \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{c(x, y, z)} = \omega \int_A^B \frac{\mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}}{c(x, y, z)}, \quad (3.9)$$

onde o último integral representa o tempo gasto pelo sinal ao longo da trajectória de propagação. Em outras palavras o sentido de propagação da perturbação acústica é tal que o tempo de percurso, ao longo desse sentido, é *mínimo*. Esta afirmação é conhecida como o *Princípio de Fermat* [19]. Com ajuda deste princípio o problema do cálculo das trajectórias dos raios de propagação (em inglês *Ray Tracing*) pode ser formulado como um problema de cálculo variacional [20] em que é necessário otimizar o integral Eq.(3.9) de maneira a tornar mínimo o tempo correspondente de percurso.

Para o caso de duas dimensões (  $r$  e  $z$  ) [1]:

$$S(B) - S(A) = \omega \int_A^B \frac{(1 + r_z)^{1/2}}{c(z)} dz . \quad (3.10)$$

Não é difícil mostrar que as funções  $r(z)$  que minimizam este integral podem ser calculadas como:

$$r(z) = \pm a \int_{z_s}^z \frac{c(z)}{(1 - a^2 c^2(z))^{1/2}} dz , \quad (3.11)$$

em que  $a = \sin \theta_0 / c(z_s)$ ,  $\theta_0$  corresponde ao ângulo inicial do raio de propagação.

As Fig.3.2 e Fig.3.3 mostram casos particulares de *RTM* em meios com batimetria variável.

O caso da Fig.3.2 é interessante pela modelização detalhada do fundo marinho. Dado tratar-se dum problema de propagação em águas pouco profundas, onde é forte a interação do sinal com o leito oceânico, resulta importante conhecer apropriadamente a batimetria do meio. Repare-se na forma rectilínea do raio, sinal de que a velocidade de propagação é constante.

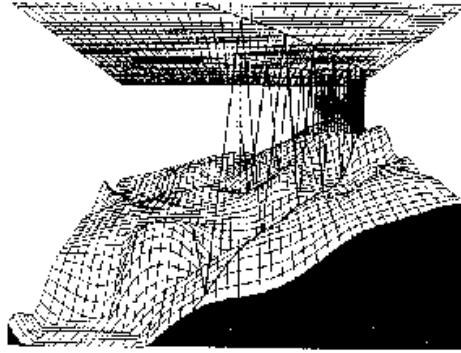


Figura 3.2: Raio de propagação na área de Kaneohe, Hawaii ( *Ref. [ 23 ]* ).

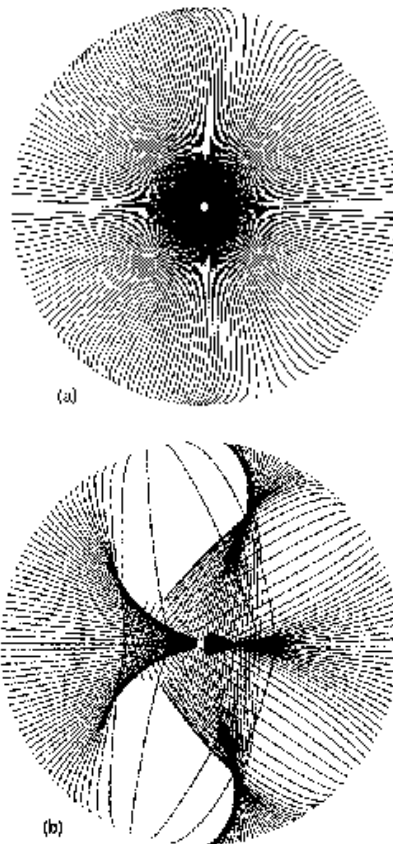


Figura 3.3: (a) Ray Tracing na superfície duma esfera, e (b) Ray Tracing do outro lado da esfera ( *Ref [ 24 ]* ).

Nas Figs. Fig.3.3(a) e Fig.3.3(b) ilustra-se a propagação de raios na superfície duma esfera de raio  $R = 6$  km. A superfície é modelada pela lei  $d = d_0[3 - \sin(2\pi x/6km)]$ , onde  $d_0 = 50m$  e  $x = r \cos \theta$ . A divergência dos raios na antípoda encontra-se condicionada pela irregularidade da guia esférica de onda. Comentemos brevemente dois métodos de cálculo

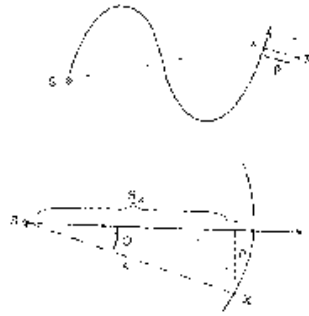


Figura 3.4: Aproximação Gaussiana para o TL ( *Ref [ 23 ]* ).

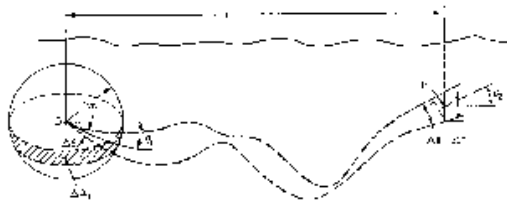


Figura 3.5: Aproximação “Espacial” para o TL ( *Ref [ 2 ]* ).

do *TL*:

- Na aproximação Gaussiana [21] considera-se que na proximidade do raio que passa por  $x$   $\Delta p \sim \exp(-a\theta^2)/S_X$ , em que  $\Delta p$  é a variação parcial de pressão no ponto  $X$  (ver figura 3.4). Aqui  $\text{tg}\theta = \rho/S_X$ ,  $\rho = \sqrt{L^2 - S_X^2}$ ,  $L$  corresponderia ao raio da onda esférica que passa em  $X$ . A variação da pressão acústica causada pela passagem dum determinado número de raios pode ser obtida como soma coerente das variações parciais.
- Na aproximação “Espacial” [2] pode demonstrar-se que num dado ponto  $P$  as perdas de transmissão podem ser calculadas pela fórmula

$$TL \approx 10 \log \frac{r\Delta h}{\Delta\theta} , \quad (3.12)$$

onde  $r$ ,  $\Delta h$  e  $\Delta\theta$  se encontram ilustrados na figura 3.5.

**Limitações do modelo:** Os RTM consideram o fundo marinho como uma superfície perfeitamente reflectora. Esta suposição elimina a possibilidade de considerar propriedades importantes do mesmo fundo, como por exemplo as suas características porosas ou dispersivas. Os RTM não são válidos para valores baixos de  $f$ , o comprimento de onda deve ser muitíssimo menor do que qualquer comprimento característico, i.e. dimensões ou irregularidades do meio em questão. Igualmente os RTM perdem toda a validade nos casos em que essas irregularidades possam originar raios que se propagam em sentido contrário ao sentido original de propagação. Os valores de  $TL$  obtidos usando RTM são estimativos. Na necessidade de obter resultados precisos é necessário recorrer a outros modelos de propagação. Em conclusão, podemos ver que os RTM devem ser fundamentalmente aplicados nos casos em que existe uma interação fraca entre o sinal acústico e as fronteiras da guia de onda (situação bastante comum em cenários de águas profundas), e quando o comprimento de onda correspondente ao valor dado da frequência seja muitíssimo menor do que a profundidade do meio.

### 3.2 Modos Normais (*NMM – Normal Mode Models*).

Pelo método de separação de variáveis representemos a solução da EH homogénea na forma [ 16 ]:

$$p(r, z) = Z(z)R(r) . \quad (3.13)$$

Obteríamos assim para  $Z(z)$  a seguinte equação diferencial (ED):

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{dz} \right) + \left( \frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right) Z = 0 , \quad (3.14)$$

onde  $k^2$  é a constante de separação das ED para  $Z(z)$  e  $R(r)$ .

A ED Eq.(3.14), conjuntamente com as CF forma um problema clássico de *Sturm–*

*Liouville* [ 22 ] de propriedades bem conhecidas. A ED em geral deve ter um número infinito de soluções ( os modos )  $Z_n(z)$ , que correspondem às funções próprias do problema de Sturm–Liouville, com valores próprios  $k_n^2$ ,  $Z_n(z)$  deverá possuir  $n$  zeros no intervalo  $z \in [0, D]$  (se  $D < \infty$  o problema de Sturm–Liouville é denominado *regular*) e os  $k_n^2$  podem ser organizados de forma tal que:

$$k_1^2 > k_2^2 > \dots \quad (3.15)$$

Também pode demonstrar-se que:

$$|k_n| < \frac{\omega}{c_{min}} \quad (3.16)$$

$\forall n$ , onde  $c_{min} = \min_z c(z)$ .

Os modos podem ser construídos de maneira a formarem um espaço de funções ortonormais:

$$\int_0^D \frac{Z_m(z)Z_n(z)}{\rho(z)} dz = \delta_{mn} . \quad (3.17)$$

Sendo assim representemos a solução da EH (não homogénea) na forma:

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)Z_n(z) , \quad (3.18)$$

para obter, depois da substituição:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\rho} \frac{\partial R_n}{\partial r} \right) Z_n + R_n \left[ \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial Z_n}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} Z_n \right] \right\} = \frac{\delta(r)\delta(z - z_s)}{2\pi r} . \quad (3.19)$$

No entanto:

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{dZ_n}{dz} \right) + \frac{\omega^2}{c^2(z)} Z_n = k_n^2 Z_n , \quad (3.20)$$

e podemos reescrever a Eq.(3.19) na forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{r} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} R_n(r) \right) Z_n(z) + k_n^2 R_n(r) Z_n(z) = -\frac{\delta(r)\delta(z - z_s)}{2\pi r} . \quad (3.21)$$

Aplicando o operador:

$$\int_0^D (\cdot) \frac{Z_l(z) dz}{\rho(z)}, \quad (3.22)$$

obteríamos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R_l(r)}{\partial r} \right) + k_l^2 R_l = -\frac{\delta(r) Z_l(z_s)}{2\pi r \rho(z_s)}, \quad (3.23)$$

cuja solução standard, tendo em conta a CR, será:

$$R_l(r) = \frac{i}{4\rho(z_s)} Z_l(z_s) H_0^{(1)}(k_l r), \quad (3.24)$$

em que  $H_0^{(1)}(k_l r)$  é a função de Hankel de primeira espécie ( ver Apêndice 1 ).

Existe um aspecto dos NMM que devemos comentar: A resolução dum ou doutro problema de propagação ( por exemplo o *Isovelocity Problem*, analisado em [16] ) mostra que podemos dividir os modos de propagação em duas categorias: os *trapped modes* com  $k_n$  reais e que se propagam a grandes distâncias, e os *evanescent modes* com  $k_n$  imaginários e cuja amplitude decai exponencialmente com  $r$ . Longe da fonte são os primeiros os responsáveis pela propagação do sinal acústico.

**Limitações do modelo:** A presença do leito rochoso pode ser modelada pela introdução dum semiplano infinito na interface inferior do sedimento. Desta forma seríamos obrigados a considerar um problema *singular* de Sturm–Liouville em que  $D = \infty$ . Em princípio pode garantir-se a existência de valores próprios reais e de funções próprias ortogonais. No entanto o número de valores próprios pode não ser infinito e a um dado valor próprio pode corresponder mais de uma função própria. A única forma de "fugir" ao problema singular consiste em considerar  $P \sim \exp(-k_n z)$  no interior do semiplano, e aplicar uma CF apropriada no ponto de contacto entre o sedimento e o leito. Este procedimento permite transformar o problema singular de Sturm–Liouville num problema standard mas não pode garantir [16] que a solução obtida seja *completa*. Em rigor uma solução completa pode ser obtida introduzindo,

conjuntamente com a soma dos modos, um termo que represente o espectro contínuo da perturbação [13, 16]. Tendo em conta que o espectro é de pouca importância longe da fonte [13], a solução dos NMM pode ser considerada exacta para grandes valores de  $r$ .

Os NMM são modelos *range-independent*, i.e. são válidos quando a profundidade  $D$  do meio não depende da distância horizontal  $r$ . Mas um meio fracamente dependente de  $r$  pode ser aproximado por uma sucessão de intervalos, cada um com profundidade constante. Resolvendo a EH em cada intervalo e ligando depois as soluções nas fronteiras podemos obter os denominados *coupled modes* [16] que representariam uma solução modal do problema de propagação em cenários do tipo *range-dependent*. Este género de solução é frequentemente utilizada como padrão de comparação com modelos adaptados a meios com batimetria variável [22, 23].

### 3.3 A Equação Parabólica (*PE – Parabolic Equation*)

No caso de baixas frequências, longe da fonte, e fazendo  $\rho(z) = \text{constante}$ , podemos considerar que:

$$p(r, z) = U(z, r)H_0^{(1)}(k_0r) , \quad (3.25)$$

em que  $U(z, r)$  é uma função que depende fracamente de  $r$  [24]. Substituindo na EH homogénea deveremos obter a seguinte ED para  $U$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{2}{V} \frac{\partial}{\partial V} r \right) \frac{\partial U}{\partial r} + k_0^2 \left( \frac{c_0^2}{c^2(r, z)} - 1 \right) U = 0 , \quad (3.26)$$

onde  $k_0$  e  $c_0$  são parâmetros de referência e  $V = H_0^{(1)}(k_0r)$ . Considerando o comportamento assintótico de  $H_0^{(1)}(k_0r)$  para grandes distâncias ( ver Apêndice 1 ) podemos reescrever a Eq.(3.26) na forma:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial U}{\partial r} + k_0^2 \left( \frac{c_0^2}{c^2(r, z)} - 1 \right) U = 0 . \quad (3.27)$$

Assumindo que  $\partial/\partial r$  e  $\partial/\partial z$  comutam mútuamente [25] podemos reescrever a Eq.(3.27)

como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 - ik_0\sqrt{1+L}\right) \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 + ik_0\sqrt{1+L}\right) U = 0, \quad (3.28)$$

onde

$$L = \left(\frac{c_0^2}{c^2(r,z)} - 1\right) + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.29)$$

Considerando só ondas divergentes Eq.(3.28) tomará o aspecto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 - ik_0\sqrt{1+L}\right) U = 0. \quad (3.30)$$

Vejamos alguns métodos de resolução desta última ED:

1.  $\sqrt{1+L} \approx 1 + L/2$ . Neste caso obteríamos a equação parabólica de Tappert [13, 25]:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{ik_0}{2} \left(\frac{c_0^2}{c^2(r,z)} - 1\right) U, \quad (3.31)$$

cuja solução analítica será [13]:

$$U(r + \Delta r, z) \approx e^{\frac{ik_0}{2} \left(\frac{c_0^2}{c^2(r,z)} - 1\right) \Delta r} F^{-1} \left\{ e^{-ik_0 \frac{V^2 \Delta r}{2}} F[U(r, z)] \right\} \quad (3.32)$$

em que  $F$  e  $F^{-1}$  correspondem às transformadas de Fourier directa e inversa, respectivamente. Nesta fórmula  $V$  representa a variável conjugada à variável  $z$ .

2.  $\sqrt{1+L} \approx \frac{1 + 3L/4}{1 + L/4} L$ . A PE resultante ( denominada equação de Claerbout ) [25, 26, 27] terá o aspecto:

$$\left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{c_0^2}{c^2(r,z)} - 1\right)\right] \frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{1}{2k_0}\right)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial r} = \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{ik_0}{2} \left(\frac{c_0^2}{c^2(r,z)} - 1\right) U, \quad (3.33)$$

e pode ser resolvida numericamente com o método de Crank–Nicolson ( ver Apêndice 2 ).

3.  $\sqrt{1+L} \approx 1 + \sum_{j=1}^M \frac{a_{2j-1,M}L}{1+a_{2j,M}L}$  em que  $a_{2j,M}$  são os chamados *coeficientes de Padé* [28].

A PE obtida com esta aproximação será [29]:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = ik_0 \left( 1 + \sum_{j=1}^M \frac{a_{2j-1,M}L}{1+a_{2j,M}L} \right) U. \quad (3.34)$$

Em particular:

$$a_{2j-1,M} = \frac{2}{2M+1} \sin^2 \left( \frac{j\pi}{2M+1} \right); a_{2j,M} = \cos^2 \left( \frac{j\pi}{2M+1} \right). \quad (3.35)$$

Esta equação pode ser resolvida numericamente com o método de Galerkin e método de Crank–Nicolson, para a discretização em  $z$  e  $r$  respectivamente ( ver Apêndice 2 ).

A resolução duma PE precisa duma condição inicial  $p(z, 0)$  ( conhecida comunmente como *starter* ). Para um meio com profundidade constante na proximidade da fonte o starter pode ser obtido usando um NMM, embora tenham sido desenvolvidas condições analíticas iniciais de outros tipos, que podem ser de maior ou menor comodidade consoante o tipo de PE usada [25]. No entanto é necessário sublinhar que a escolha *a priori* dum ou doutro starter, consoante o tipo de meio a descrever, continua a ser um problema para o qual não existe uma uniformidade de resposta [22].

**Limitações do modelo:** A limitação angular da PE de Tappert obriga-nos a levantar dúvidas em relação a alguns dos resultados que proporciona. Eis um exemplo: Como podemos ver na Fig.3.6 existe uma secção de intensa penetração no fundo marinho, correspondente a um ângulo de  $20^\circ$ . Aparentemente não deveriam existir razões para pôr em causa este detalhe do regime de propagação, mas se tivermos em conta que o ângulo dado corresponde ao dobro da capacidade da PE de Tappert, então a informação referente à zona em questão perde toda validade. A PE de Claerbout por sua vez tem uma validade angular de  $40^\circ$  em relação à horizontal. À medida que aumenta o número de coeficientes de Padé

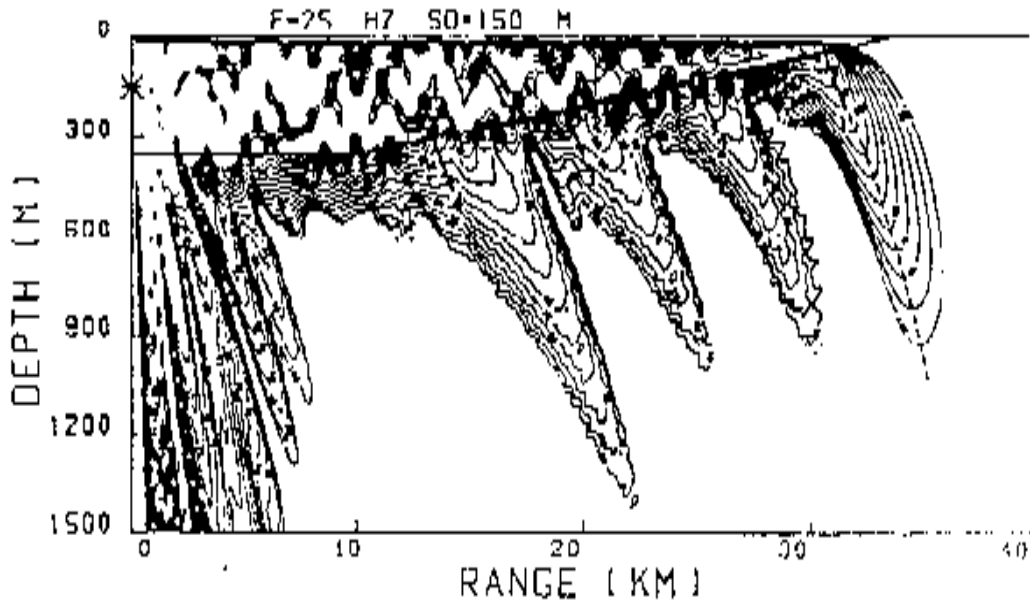


Figura 3.6: Contur de TL para o problema da profundidade decrescente ( *Ref [13]* ).

numa aproximação do operador  $\sqrt{1+L}$  pode-se melhorar a validade angular da PE resultante. Esta melhoria implica, no entanto, um incremento significativo no tempo de cálculo. Tendo em conta que em todas as PEs o campo acústico é construído progressivamente em  $r$  a precisão dos resultados depende fortemente da discretização do meio, tanto em distância como em profundidade. Assim o esforço de cálculo necessário para obter resultados fiáveis pode chegar a ser elevado e por vezes dispendioso. Uma outra limitação reside na própria CR, já que no caso de profundidade decrescente, como o problema da Fig.3.6, a interação do sinal acústico com o fundo tem como consequência a existência uma sobreposição entre o sinal propagado e o sinal reflectido. Essa interação em geral não pode ser desprezada. A intensa investigação teórica e numérica realizada neste sentido apresenta grandes progressos [29] embora seja ainda necessário desenvolver um determinado esforço para testar a validade dos resultados do modelo.

### 3.4 Modelos de Campo Rápido (*FFP – Fast Field Program*).

Representemos a pressão acústica  $p(r, z)$  na forma:

$$p(r, z) = \int_0^{\infty} p(k, z) k J_0(kr) dk , \quad (3.36)$$

em que  $J_0(r)$  é a função de Bessel de ordem 0 ( ver Apêndice 1 ). Substituindo na EH, com  $\rho(z) = \text{constante}$ , obteríamos a seguinte ED para  $p(k, z)$ :

$$\frac{d^2 p}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right) p = \frac{\delta(z - z_s)}{2\pi} , \quad (3.37)$$

que possui soluções analíticas  $F_i(k, z)$  bem conhecidas nos casos  $c_1(z) = \text{constante}$ , e  $c_2(z) = c_0/\sqrt{az + b}$  [30]. Podemos escrever formalmente que:

$$p(k, z) = C_1(k)F_1(k, z) + C_2(k)F_2(k, z) + F_{inh}(k, z) \quad (3.38)$$

em que  $C_{1,2}(k)$  é um conjunto de coeficientes inicialmente desconhecidos e  $F_{inh}$  corresponde a uma solução específica da equação não homogênea.

Um meio oceânico com um perfil arbitrário de velocidade  $c(z)$  pode então ser representado como um conjunto de  $N$  camadas, em que  $c(z) = c_1(z)$  ou  $c(z) = c_2(z)$ , no interior de cada camada . A partir das CF podemos calcular analiticamente os coeficientes desconhecidos  $C_i(k)$  e pelo cálculo da transformação Eq.(3.36) podemos obter  $p(r, z)$ .

**Limitações do modelo:** OS FFP são válidos para meios com  $D = \text{constante}$ . Para uma boa aproximação dum perfil arbitrário de velocidade é indispensável introduzir um número significativo de camadas. O tipo de solução usado nos FFP não permite inserir apropriadamente o problema da dispersão determinística. A adaptação do modelo a meios fracamente dependentes de  $r$ , de maneira análoga à técnica dos coupled modes, pode dar lugar a instabilidades de cálculo [23].

### 3.5 Implementação e Exemplos

Quando o trabalho aqui apresentado teve início, no Laboratório de Processamento de Sinal (SiPLAB), da Área Departamental de Electrotecnia e Computação da UALG, já se encontravam implementados o FFP *SAFARI* [30] e o NMM *SNAP* [31], sendo posteriormente obtidos via *ftp* os pacotes informáticos *AT* (*Acoustic Toolboxes*, escrito por Michael Porter e contendo o RTM *BELLHOP* e o NMM *KRAKEN* [16] ) e *FEPE* ( da autoria de Michael Collins, contendo, entre outros, o PE *FEPE* [22] ). Com o objectivo de unificar as saídas gráficas dos diferentes programas ( o *KRAKEN* e o *FEPE* usam o formato do NRL – *Naval Research Laboratory* – adaptado ao pacote gráfico *DISSPLA* ) foram introduzidas uma série de modificações nos programas que produziam os resultados, de forma a criar com base neles os ficheiros *\*.PLP* e *\*.PLT* para gráficos de *TL* versus profundidade, distância horizontal e outros, assim como os ficheiros *\*.CDR* e *\*.BDR* para os gráficos do *CONTUR*, os quais correspondem ao formato do *SACLANTCEN*, usado pelo *SAFARI*. A leitura dos ficheiros de dados e de definição e a respectiva visualização é realizada pelo pacote gráfico *XPLOT* e pelo programa *viewcdr.m*, criado com variáveis do ambiente *MATLAB*.

O material gráfico das páginas 21 a 33 é constituído na sua maior parte por exemplos apresentados nos manuais, mas inclui igualmente alguns casos criados na intenção de sublinhar aspectos particulares do problema geral de propagação. Cada um dos ficheiros de dados exemplifica o tipo de parâmetros usados com maior frequência em simulação e, ao mesmo tempo, ilustra de maneira concreta o formato da informação processada por cada modelo. As diferentes figuras permitem ter uma ideia concisa tanto das potencialidades dos modelos como da versatilidade dos pacotes gráficos envolvidos na visualização dos resultados.

```

"Isovelocity Problem"
100.0      ! Freq (Hz)
1         ! Nmedia
'CVF'     ! Options
51 0.0 100.0 ! Depth (in m)
   0.0 1500.0 /
100.0 1500.0 /
'V'      0.0
1        20.0 / ! NSD, SD (in m)
51      0.0 100.0 / ! NRD, RD (in m)
1001, 0.0 1.0 / ! NR, \ R (in km)
'R'
30 -20.0 20.0 ! NBEAMS, ALPHA1,2 (degress)
0.0 100.0 1.0, ! STEP (m), ZBOX (m), RBOX (km)

```

Ficheiro de dados usado pelo BELLHOP no *Isovelocity Problem*,  $c = 1500$  m/s.

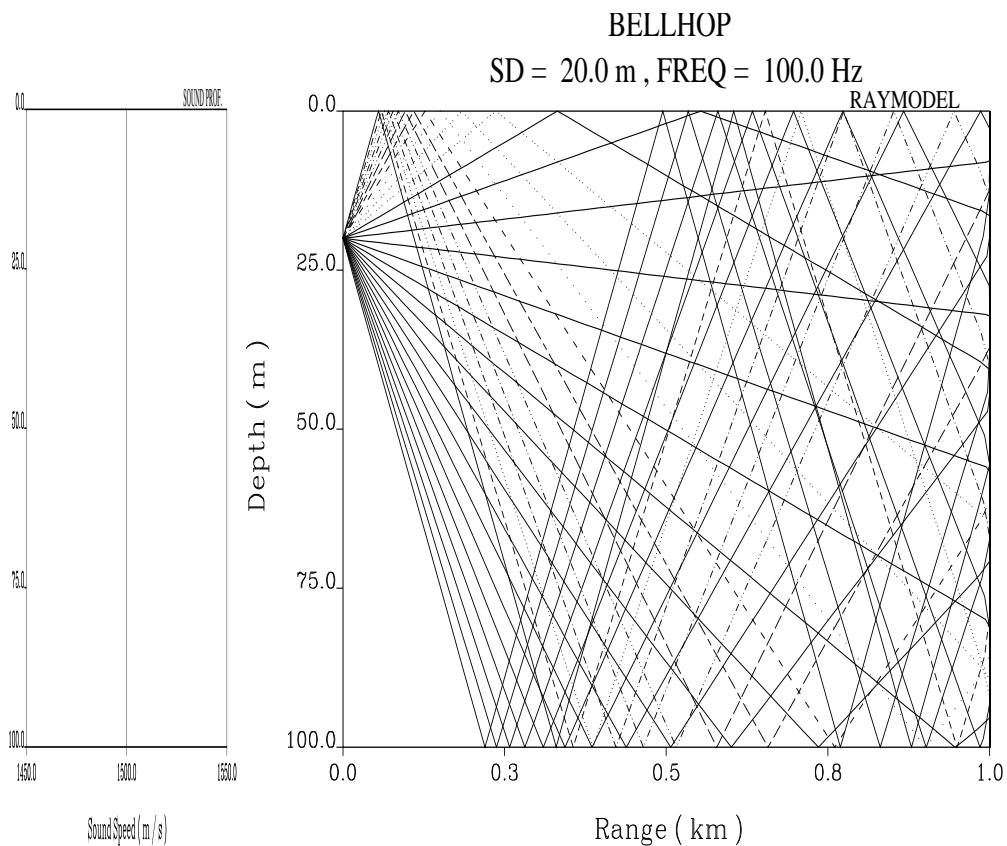


Figura 3.7: Perfil de velocidade e raios de propagação no *Isovelocity Problem*. No caso de águas pouco profundas a velocidade de propagação na coluna de água pode ser considerada constante. As fronteiras da guia de onda são perfeitamente reflectoras.

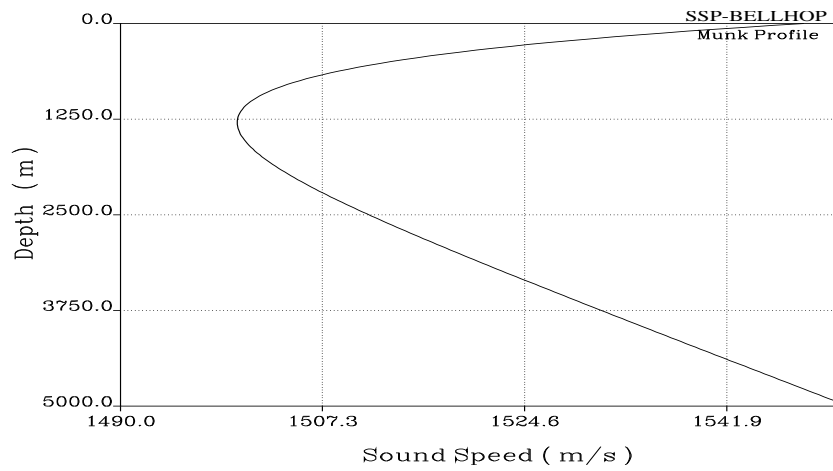
Ficheiros de dados usado pelo BELLHOP nos casos *Munk Profile* e *SOFAR*.

```
"Munk Profile"
 50.0      ! Freq (Hz)
  1        ! Nmedia
'SVF'      ! Options
51 0.0 5000.0 ! Depth (in m)
  0.0 1548.52 /
 200.0 1530.29 /
 400.0 1517.78 /
 600.0 1509.49 /
 800.0 1504.30 /
1000.0 1501.38 /
1200.0 1500.14 /
1400.0 1500.12 /
1600.0 1501.02 /
1800.0 1502.57 /
2000.0 1504.62 /
2200.0 1507.02 /
2400.0 1509.69 /
2600.0 1512.55 /
2800.0 1515.56 /
3000.0 1518.67 /
3200.0 1521.85 /
3400.0 1525.10 /
3600.0 1528.38 /
3800.0 1531.70 /
4000.0 1535.04 /
4200.0 1538.39 /
4400.0 1541.76 /
4600.0 1545.14 /
4800.0 1548.52 /
5000.0 1551.91 /
'V' 0.0
1 1000.0      ! NSD, SD (in m)
51  0.0 5000.0 ! NRD, RD (in m)
1001, 0.0 100.0 ! NR, R (in km)
'R'
50 -15.0 15.0 ! NBEAMS, ALPHA1,2 (degress)
0.0 5500.0 101.0, ! STEP (m), ZBOX (m), RBOX (km)
```

```
"SOFAR"
100.0      ! Freq (Hz)
  1        ! Nmedia
'SVF'      ! Options
51 0.0 4000.0 ! Depth (in m)
  0.0 1500.0
 400.0 1450.0
 800.0 1550.0
1200.0 1520.0
2400.0 1550.0
4000.0 1780.0
'V' 0.0
1 400.0      ! NSD, SD (in m)
51  0.0 4000.0 ! NRD, RD (in m)
1001, 0.0 20.0 ! NR, R (in km)
'R'
50 -30.0 30.0 ! NBEAMS, ALPHA1,2 (degress)
0.0 4100.0 21.0, ! STEP (m), ZBOX (m), RBOX (km)
```

*Repare-se na presença de dois mínimos no perfil de velocidade. Como consequência disto podemos obter regimes de propagação significativamente diferentes dependendo da posição da fonte ( ver Fig.3.9(a)&(b) ).*

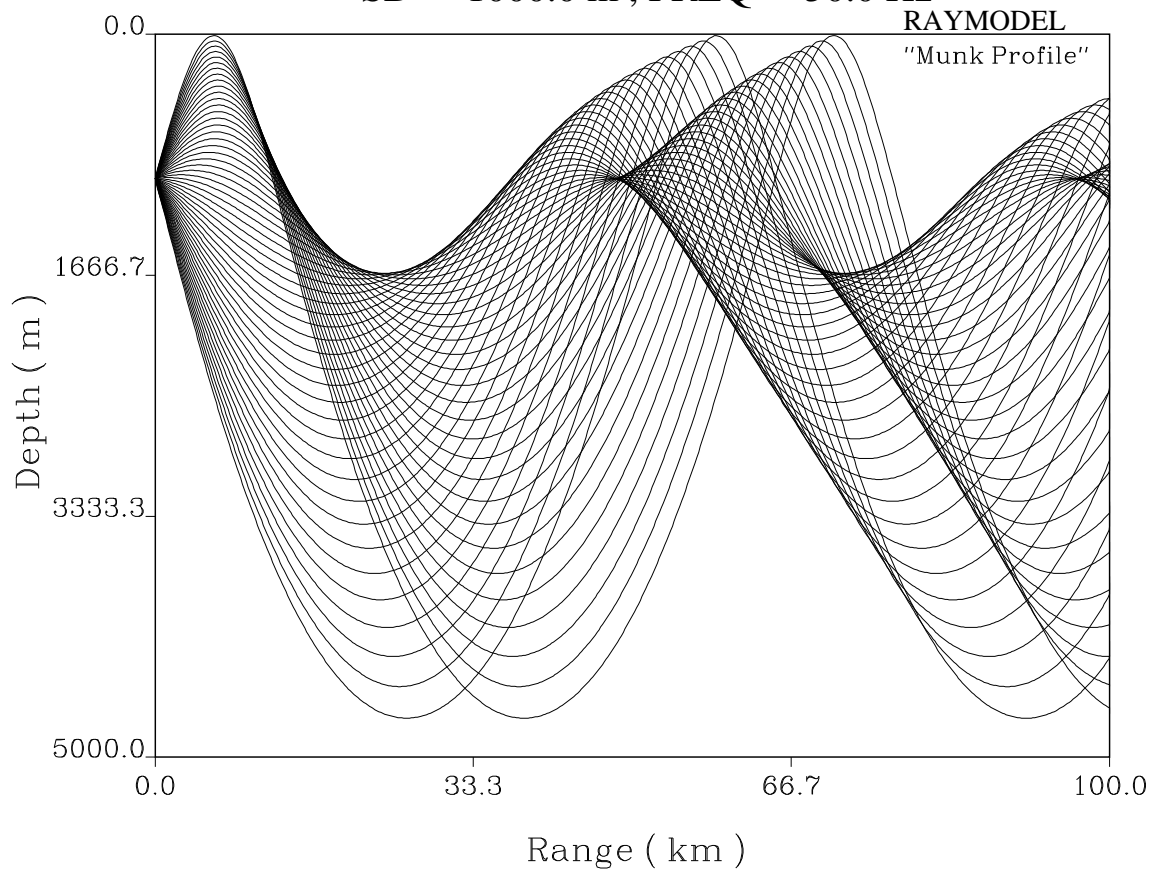
## Raios de Propagação do RTM BELLHOP



(a)

## BELLHOP

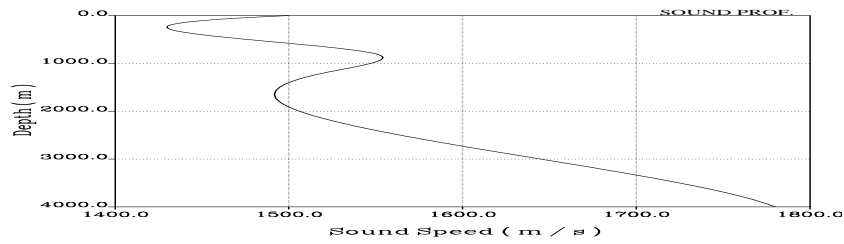
SD = 1000.0 m , FREQ = 50.0 Hz



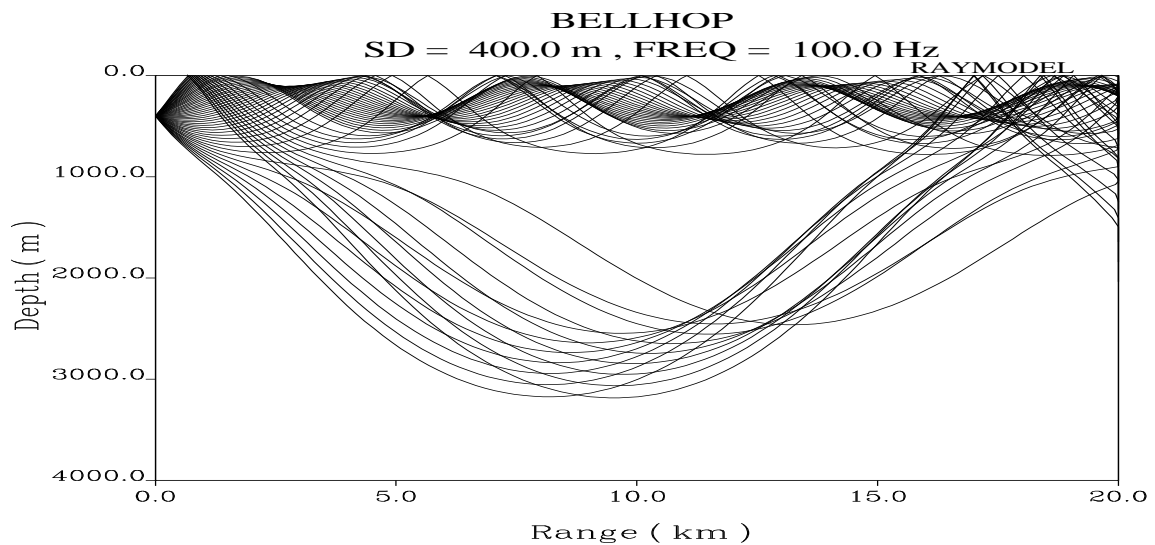
(b)

Figura 3.8: Perfil de velocidade (a) e raios de propagação (b) para o *Munk Profile*.  $c(z)$  tem um valor mínimo de  $1500\text{m/s}$  à profundidade de  $1400\text{m}$ . A variação da velocidade de propagação tem como consequência o efeito de *Reflexão interna*, mais comumente conhecida como *Refracção*. Os raios de propagação são reflectidos pela própria coluna de água antes de alcançar as suas fronteiras.

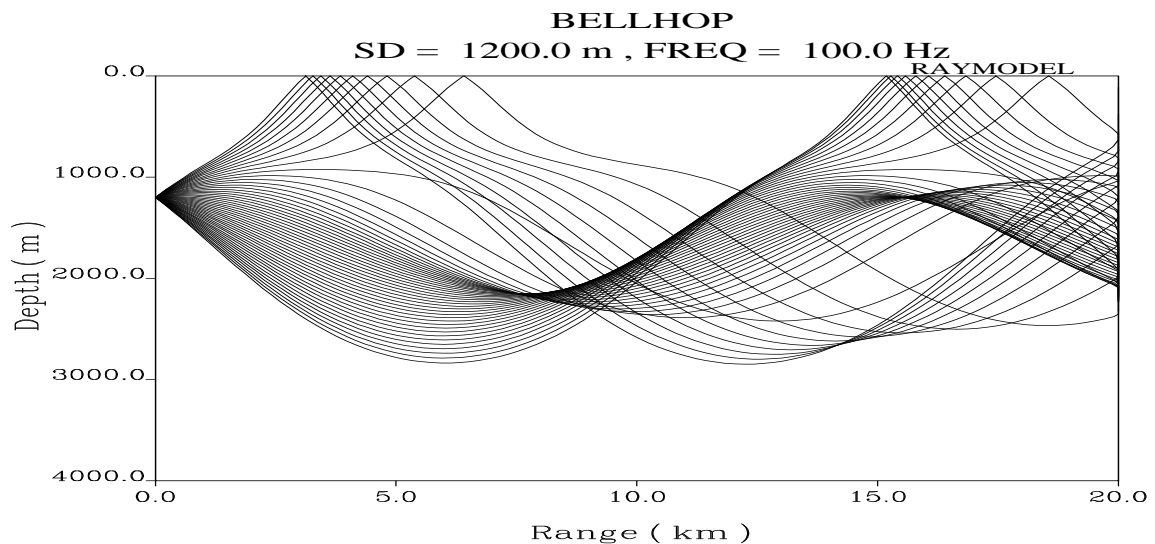
## Raios de Propagação do RTM BELLHOP



(a)



(b)



(c)

Figura 3.9: Perfil de velocidade e raios de propagação no caso *SOFAR*. O tipo de perfil é similar à velocidade de propagação na Baía de Biscaia [ 8,13 ]. Repare-se no grupo de raios a propagarem-se em canais diferentes, dependendo da posição da fonte (*SD*): b)  $SD = 400$  m; c)  $SD = 1200$  m. Em cada caso *SD* coincide com um mínimo no perfil de velocidade.

Ficheiro de dados usado pelo KRAKEN no caso *FRAMIV*.

```
"FRAMIV Twersky S/S ice Scatter"
20.0      ! Freq (Hz)
4         ! Nmedia
'NSF'     ! Options
0.0092  8.2  5.1
750  0.0  3750.0 ! Depth (in m)
  0.0  1436.0  0.0  1.03 /
  30.0  1437.4 /
  50.0  1437.7 /
  80.0  1439.5 /
 100.0  1441.9 /
 125.0  1444.6 /
 150.0  1450.0 /
 175.0  1456.1 /
 200.0  1458.4 /
 250.0  1460.0 /
 300.0  1460.5 /
 350.0  1460.6 /
 400.0  1461.0 /
 450.0  1461.5 /
 500.0  1462.0 /
 600.0  1462.9 /
 700.0  1463.9 /
 800.0  1464.8 /
 900.0  1465.8 /
1000.0  1466.7 /
1100.0  1467.0 /
1200.0  1469.0 /
1300.0  1469.5 /
1400.0  1471.8 /
1600.0  1474.5 /
1800.0  1477.0 /
2000.0  1479.6 /
2500.0  1487.9 /
3750.0  1510.4 /
35  0.0  3808.33
   3750.0  1504.6      0.0  1.50  .15  0.0
   3808.33  1603.07 /
35  0.0  3866.66
   3808.33  1603.07      0.0  1.533  .15  0.0
   3866.66  1701.53 /
35  0.0  3925.0
   3866.66  1701.53      0.0  1.566  .15  0.0
   3925.0  1800.0 /
'A'  0.0
3925.0  1800.0  0.0  1.60  0.15  0.0
1  200.0 /          ! CLOW CHIGH (m/s)
300.0          ! RMAX      (in km)
1  25.0 /          ! NSD, SD (in m)
201  0.0  3750.0 / ! NRD, RD (in m)
```

Na Fig.3.10 pode-se ver o perfil de velocidade do caso *FRAMIV*. Na Fig.3.11 estão representados 4 dos 16 modos deste caso de propagação. Repare-se que o modo de ordem  $n$  tem  $n$  zeros.

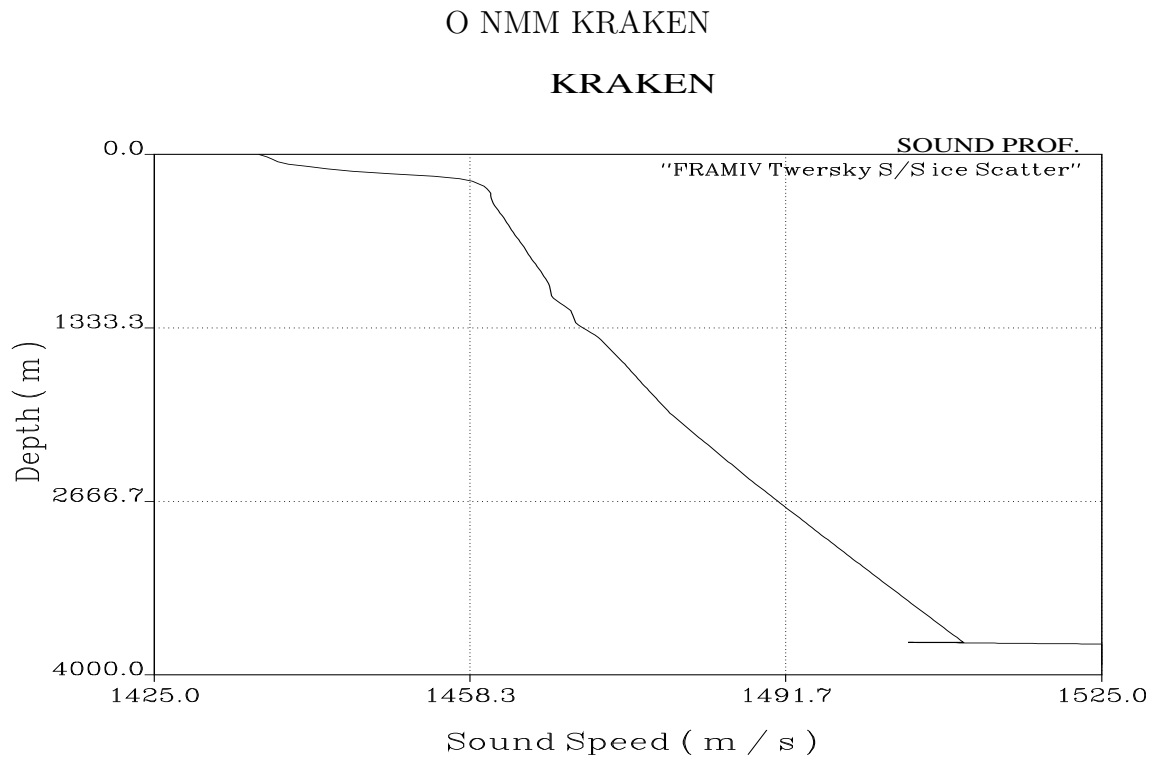


Figura 3.10: Perfil de propagação no *FRAMIV*.

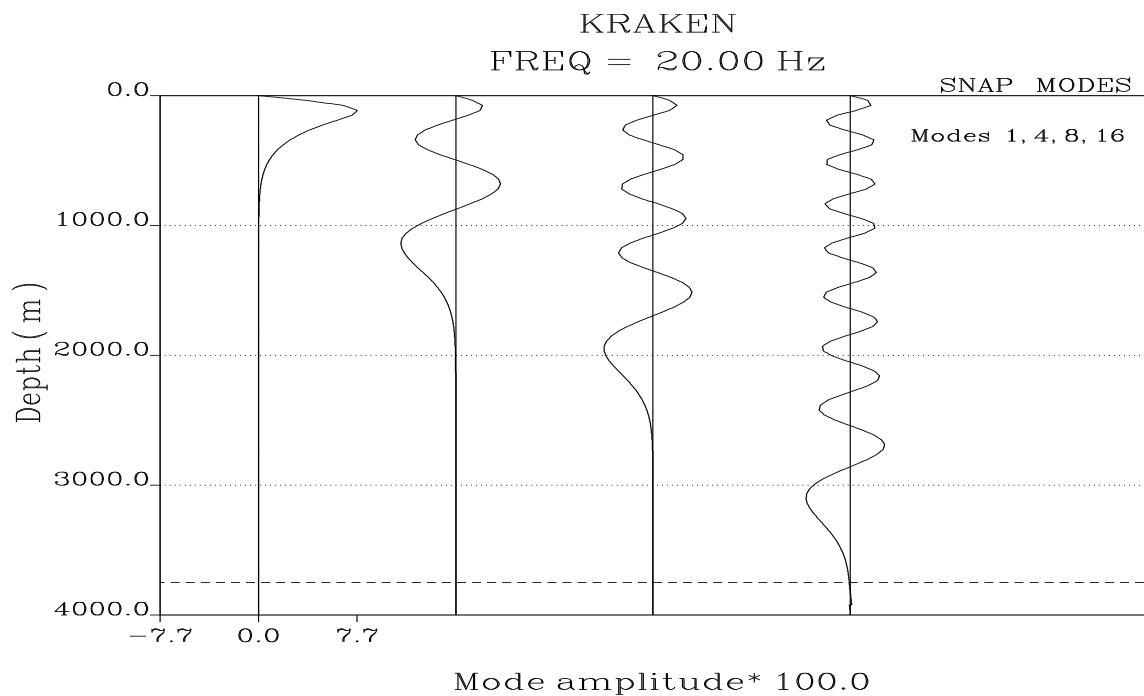


Figura 3.11: Modos de propagação no *FRAMIV*. SNAP MODES corresponde a uma instrução específica requerida pelo XPLOTT para este tipo de gráficos e não se encontra relacionada com o NMM SNAP.

## CONTUR de TL do NMM KRAKEN

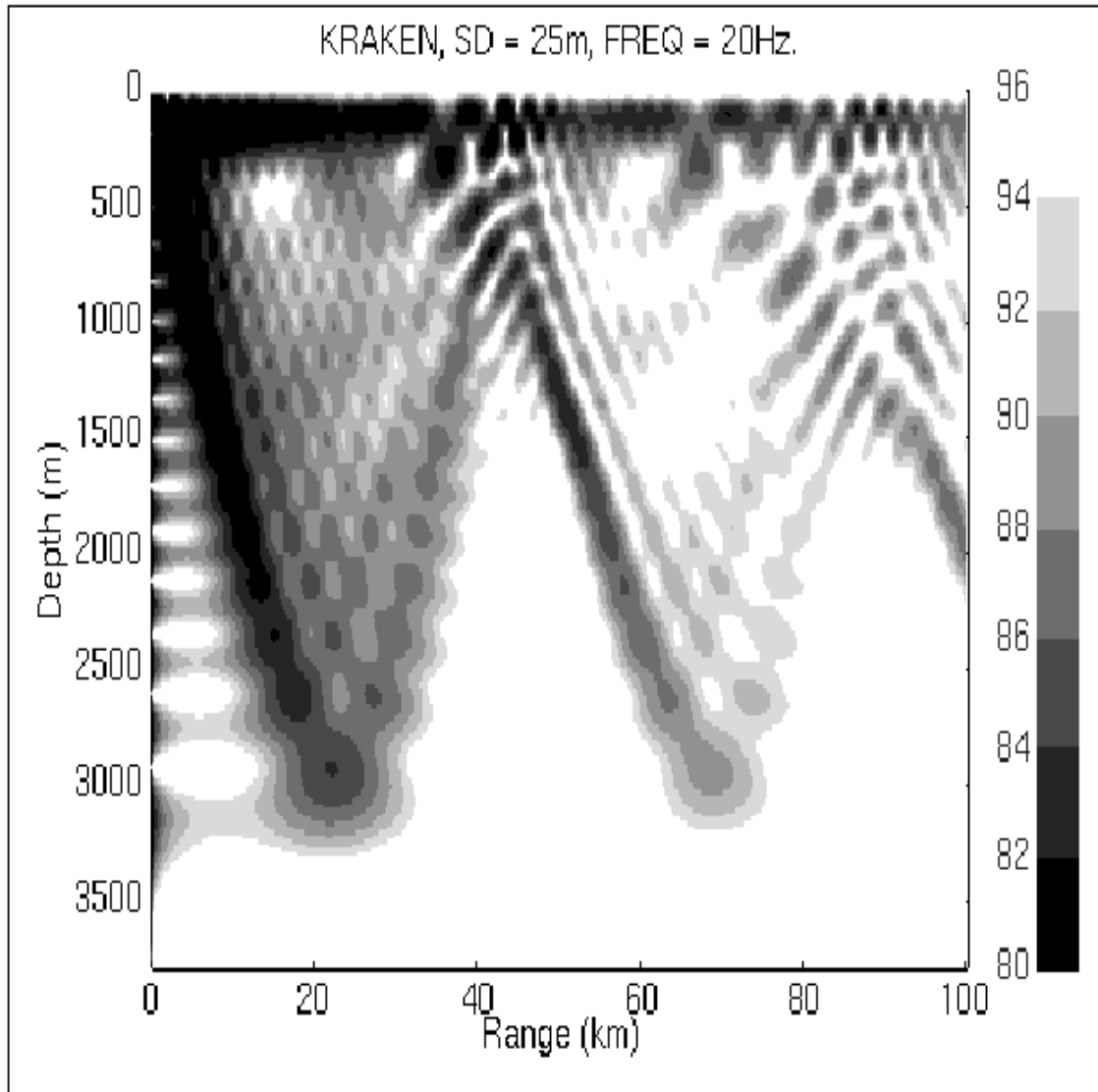


Figura 3.12: Caso *FRAMIV*: Os parâmetros usados são típicos das zonas árticas. Neste caso modela-se o regime de propagação, contando com a presença duma capa irregular de gelo na superfície da coluna de água. A escala lateral ( em dB ) permite avaliar a intensidade relativa do sinal acústico para diferentes valores de profundidade e distância horizontal. Os valores baixos de *TL* ( mais escuros ) correspondem a zonas em que um captor poderia receber um sinal intenso, enquanto que nas zonas com valores mais altos de *TL* ( mais claras ) o sinal seria mais fraco. A separação da perturbação em duas componentes principais deriva fundamentalmente das características específicas do perfil de velocidade ( ver Fig.3.10 ).

Ficheiro de dados usado pelo FEPE no *Isovelocity Problem*.

```
"Isovelocity Problem"
25.0 25.0 25.0      ! FREQ ZS ZR
4000.0 2.0 2000     ! RMAX DR NDR
200.0 0.5 400 50.0 ! ZMAX DZ NDZ ZMPLT
1500.0 1 70.0 0     ! CO NPADE THETA IREFL
3 0.0 89.5 1       ! ISTRT RMIN THMAX MPADE
0.0 100.0          ! BATHYMETRY
-1 -1
0.0 1500.0
-1 -1
0.0 1500.0
-1 -1
0.0 1.0
-1 -1
0.0 0.0
-1 -1
```

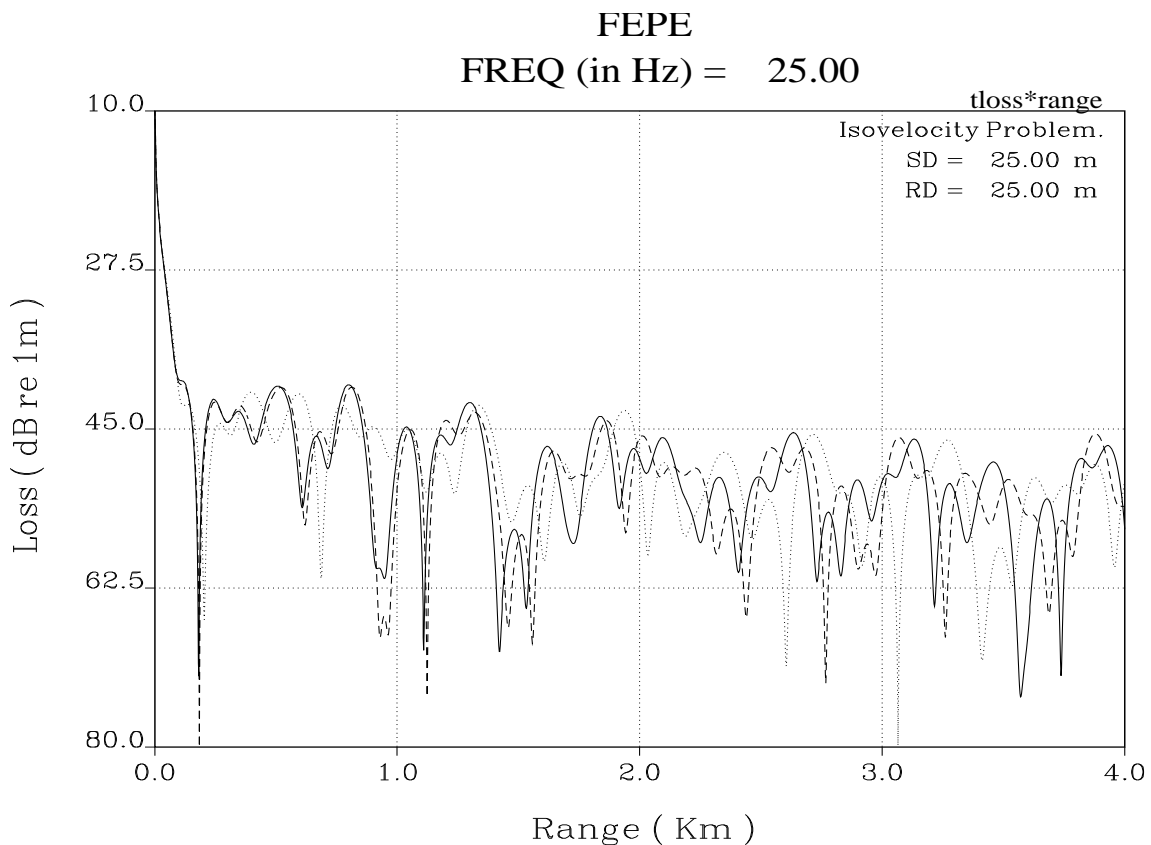


Figura 3.13: *TL vs. range* para diferentes valores dos coeficientes de Padé no *Isovelocity Problem*, a velocidade de propagação na coluna de água é constante e igual a 1500 m/s e a profundidade do meio  $D = 200$  m:  $N(M)PADE = 1$  ( linha  $\cdots$  ), 2 ( linha  $- -$  ), 4 ( linha  $—$  ). A linha contínua coincide com a solução obtida usando o NMM FEMODE ( [22] ). Repare-se que os erros de fase aumentam com  $r$  e diminuem com  $NPADE$ . A superfície e o fundo da guia de onda são consideradas livres de pressão.

Ficheiro de dados usado pelo FEPE no *Jensen-Kuperman Problem*.

```
"Jensen-Kuperman Problem"
25.0 112.0 50.0      ! FREQ ZS ZR
12000.0 5.0 12      ! RMAX DR NDR
1200.0 6.0 1 1203.0 ! ZMAX DZ NDZ ZMPLT
1500.0 2 70.0 0     ! CO NPADE THETA IREFL
1 0.0 80.0 2       ! ISTRT RMIN THMAX MPADE
0.0 200.0         ! BATHYMETRY
 5000.0 200.0     A profundidade da coluna de água é constante ( 200 m ) até aos 5 km.
10173.0 60.0     Depois começa a diminuir linearmente até alcançar os 60 m aos 10 km.
-1 -1
 0.0 1500.0      O perfil de velocidade na coluna de água é constante e igual a 1500 m/s.
-1 -1
 0.0 1704.5      O perfil de velocidade no sedimento é constante e igual a 1704.5 m/s.
-1 -1
 0.0 1.15
-1 -1
1000.0 0.5
1200.0 10.0
-1 -1
```

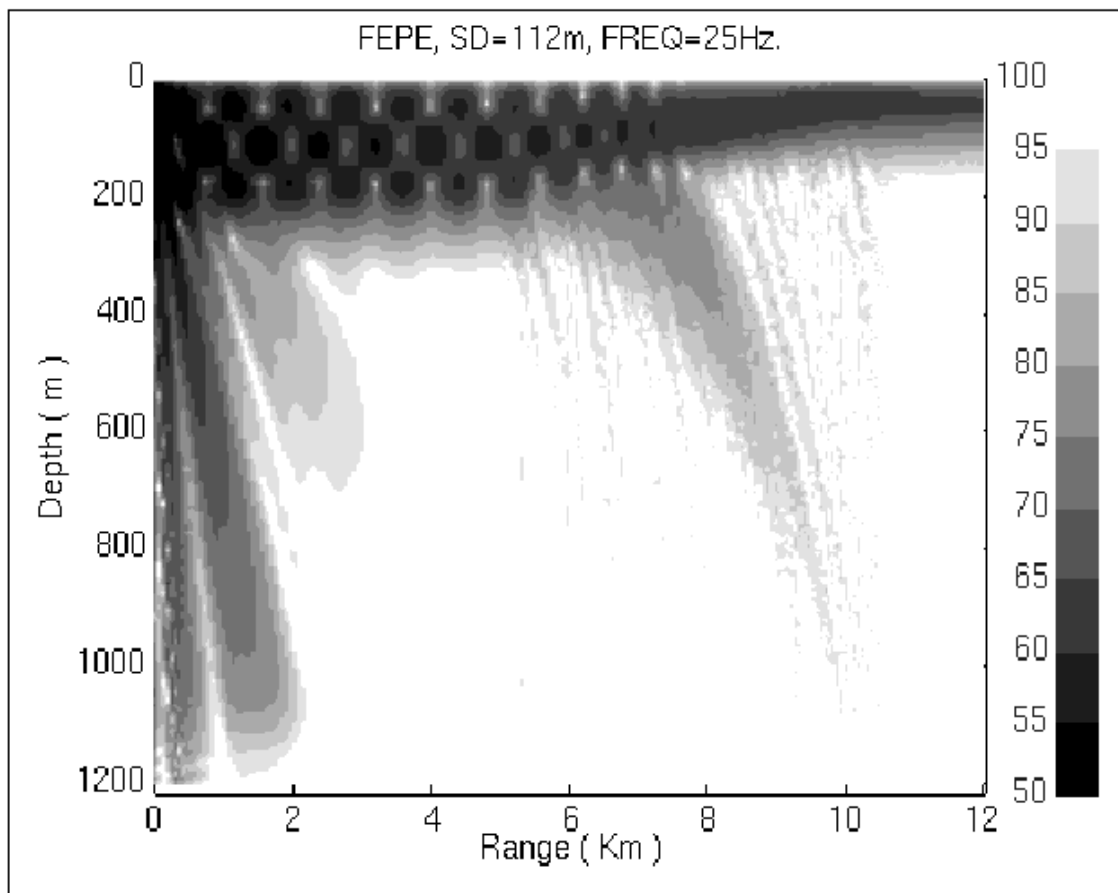


Figura 3.14: Contur de *TL* do *Jensen-Kuperman Problem*. Repare-se nas zonas de intensa penetração do sinal acústico na zona da elevação.

Ficheiros de dados usados pelo SAFARI no *SAFARI-FIP* ( um *Pekeris Problem* ) e no *SAFARI-BEAM*.

## SAFARI-FIP

```

N I J      !OPTIONS
50  0      !FREQ (in Hz)
3          !NLAYERS
0 0 0 0 0 0
0   1500 -1500 0 0 1 0  A velocidade de propagação na coluna de água é 1500
1000 2000      0 0 0 2.0 0 m/s. A velocidade de propagação no fundo é 2000 m/s.
100        !SD
100 100 1 1    !RD
1350 1E8      !CMIN CMAX
1024 1 1010    !WNSAMPLING
0 3. 20 0.5 !RANGE PAR.
20 110 20 10 !TL PAR.
20 110 20 10

```

## SAFARI-BEAM

```

P N C L
1000
4
65 1500 0 0 0 1 0
65 1500 0 0 0 1 0      A velocidade de propagação na coluna de água é 1500 m/s.
100 1600 400 0.2 0.5 1.8 0 Aos 100 m de profundidade encontra-se o sedimento.
120 1800 600 0.1 0.2 2.0 0 Aos 120 m acaba o sedimento e começa o fundo de areia.
50 41 0.75 25.0 4 100
50 125 51 52
1500 5000
2048 1400 1950
0.0 0.3 20 0.05
50 125 12 25
24 54 6

```

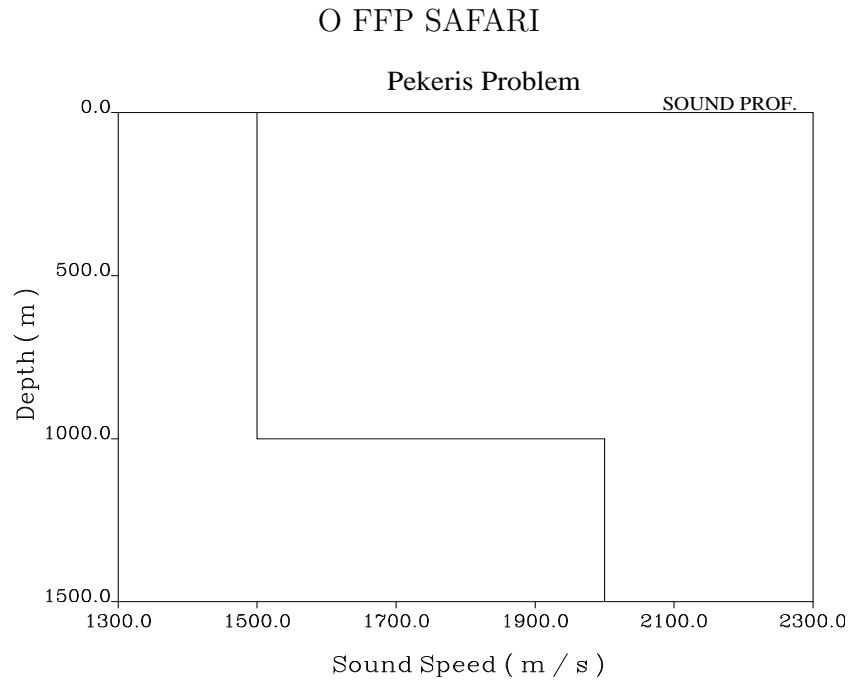


Figura 3.15: Perfil de propagação no *SAFARI-FIP*. O tipo de perfil aqui escolhido não se encontra corretamente inserido num cenário de águas profundas. Por regra geral o  $c(z)$  observado num caso *deep water* mostra variações significativas do perfil na coluna de água. Este Pekeris Problem foi escolhido apenas para mostrar a dependência entre a função de Green e a frequência do sinal ( ver Fig.3.17 ).

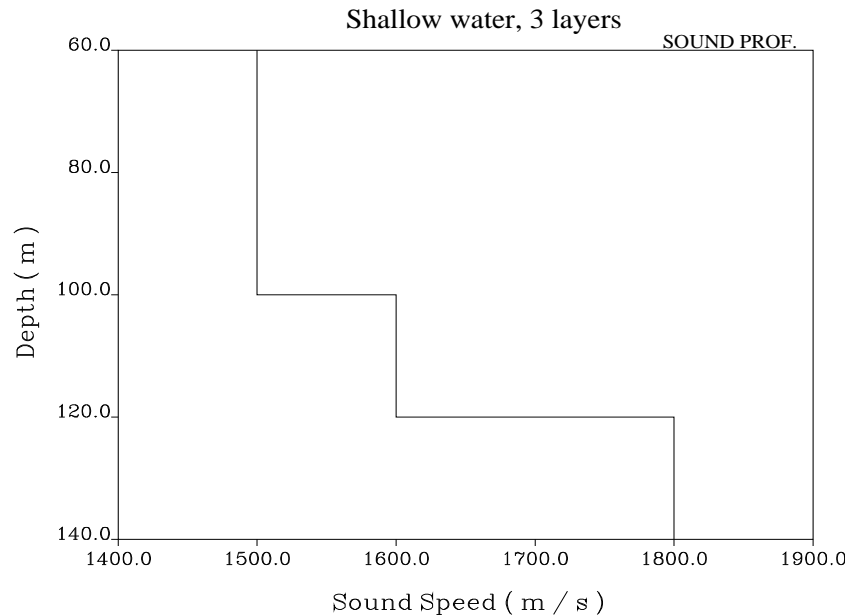


Figura 3.16: Perfil de propagação no *SAFARI-BEAM*. As variações bruscas de  $c(z)$  têm lugar na fronteira de separação entre camadas adjacentes.

## O FFP SAFARI

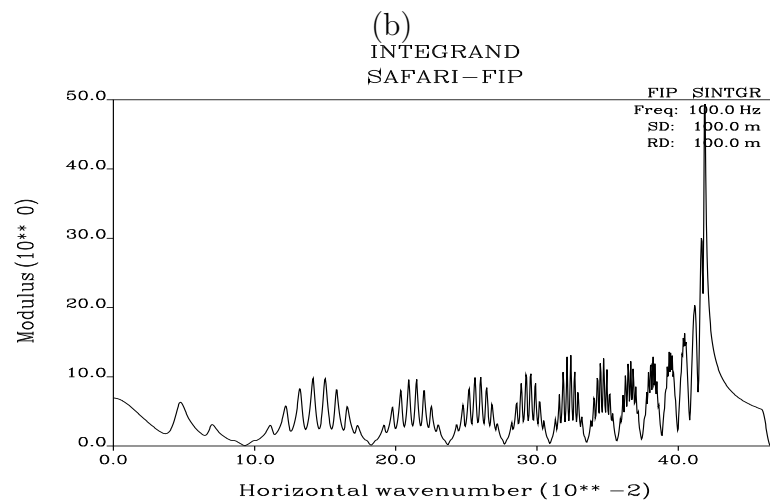
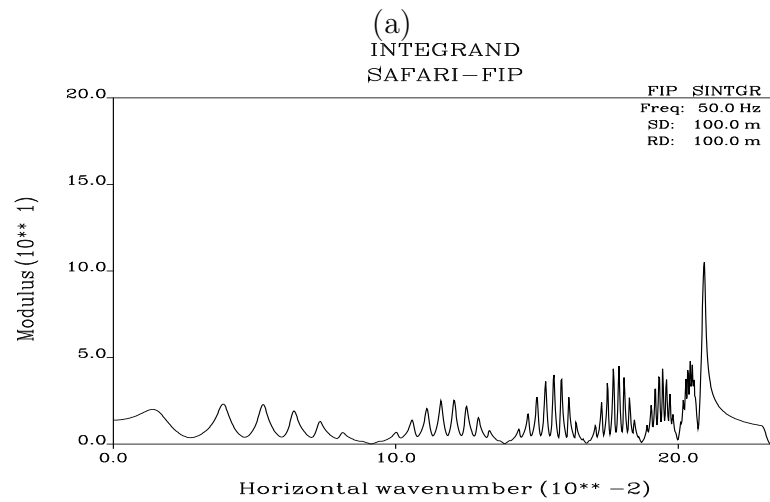
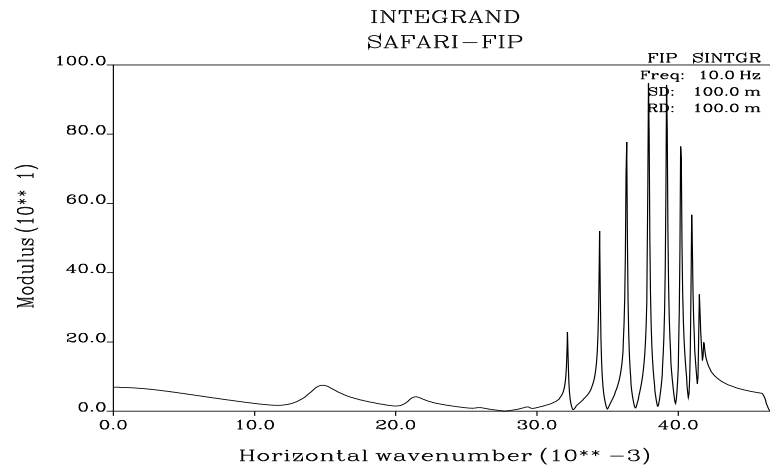


Figura 3.17: Funções de Green para valores diferentes da frequência. Os máximos da função corresponderiam aos modos de propagação num NMM.

## CONTUR de TL do FFT SAFARI

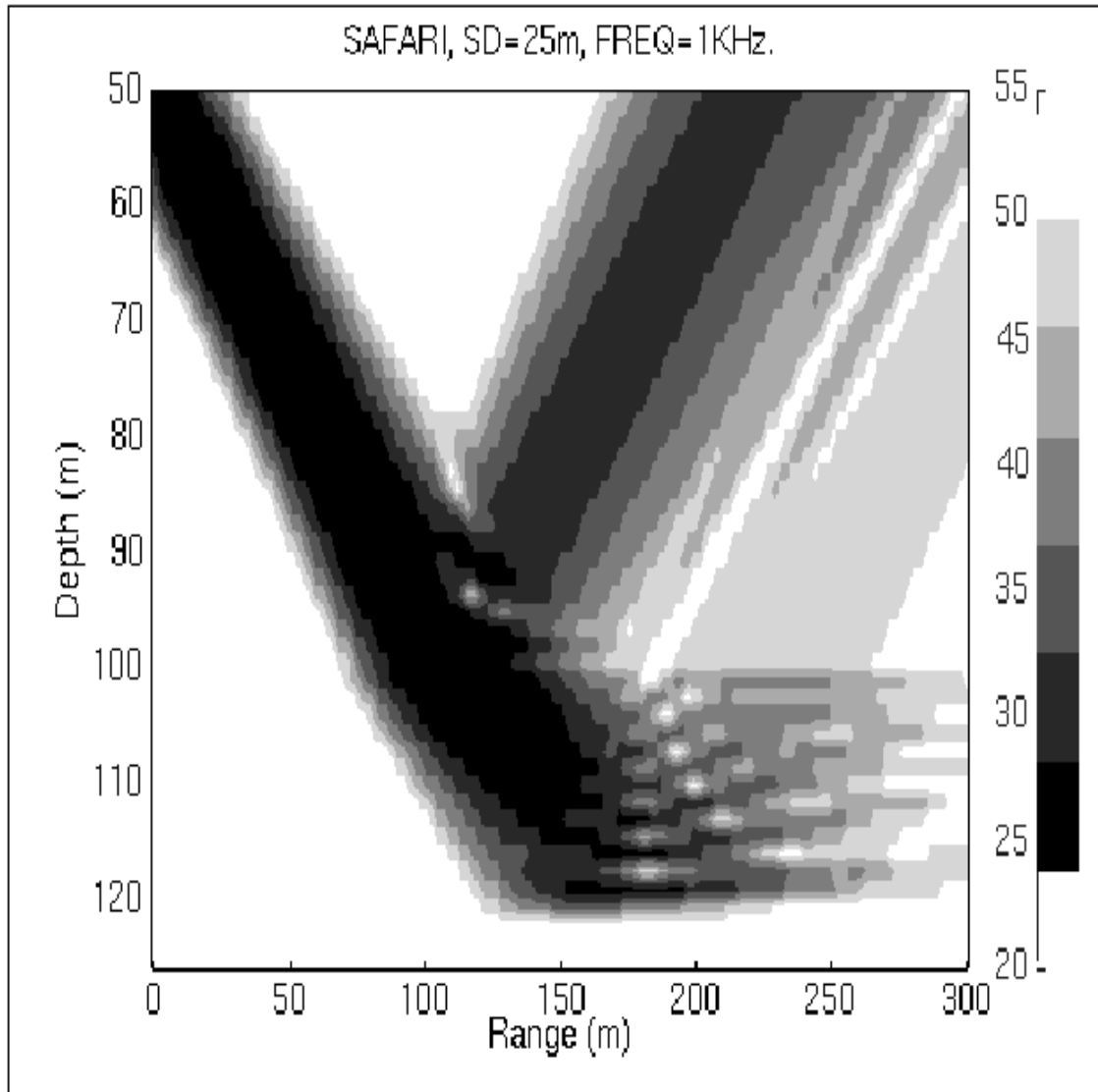


Figura 3.18: Modelização da incidência dum *BEAM* acústico de propagação nas interfaces entre diferentes meios. O valor do ângulo de incidência do *BEAM* inicial é superior ao valor do ângulo crítico (*grazing angle*) para a fronteira de separação entre a coluna de água e o sedimento. Por esta razão parte do *BEAM* é reflectida para a coluna de água e parte transmitida ao sedimento. Por sua vez o ângulo de incidência do *BEAM* transmitido é *inferior* ao ângulo crítico para a interface sedimento–fundo de areia. Por esta razão este feixe é totalmente reflectido na fronteira que separa os dois meios ( ver os parâmetros que definem a extensão da cada nível no ficheiro de dados do SAFARI-BEAM ).



# Capítulo 4

## Comparação de Modelos

Os casos ilustrados no final do capítulo anterior permitem ter uma ideia concreta das capacidades e potencialidades de cada modelo, na descrição de aspectos específicos da propagação dos sinais acústicos no oceano. Neste capítulo pretende-se obter uma resposta às seguintes questões: de que maneira podemos confiar nos resultados fornecidos por um dado modelo de propagação? Qual a precisão dos resultados do modelo quando comparados com um caso padrão? A resposta ideal a estas perguntas deveria consistir em confrontar directamente as predicções do modelo com experiências realizadas em condições reais ou controladas. Mas no oceano real é preciso dispor de informação pormenorizada da área em que se procede à recolha de informação, tarefa esta de grande dificuldade técnica. Por sua vez a manipulação das características do meio envolve a construção de instalações apropriadas, apresentando-se esta alternativa bastante dispendiosa quer em termos materiais quer em termos humanos. A opção que resta ( e em princípio a mais viável, pelo menos dum modo imediato ) consiste em comparar o modelo com a solução analítica dum caso específico de propagação. Embora limitada às condições particulares do problema dado, esta solução é *exacta* no limite das considerações tomadas em conta. Os resultados que permite obter não dependem da predisposição subjectiva do programador. Este último teria como objectivo fundamental fornecer

os dados iniciais de cada modelo, de tal maneira que sejam reproduzidas, tão fielmente quanto possível, as condições do problema analítico. Este método de comparação, claro está, não pode responder às questões relacionadas com as discrepâncias entre a teoria e a experiência, mas pode permitir uma avaliação mais clara das vantagens e limitações de cada modelo de propagação.

## 4.1 Solução Analítica do Problema de 3 camadas

Por regra geral nos casos do tipo *shallow water* o meio oceânico costuma ser aproximado através dum sistema de níveis, cada um deles homogéneo, e admitindo a discontinuidade da densidade e do perfil de velocidade na interface entre dois níveis diferentes. Considera-se, igualmente, que a velocidade de propagação é constante no interior de cada camada. No entanto, e tendo em conta a grande variedade de possíveis cenários de águas pouco profundas que podem ser encontrados em condições reais, torna-se interessante, do ponto de vista prático, analisar o caso de propagação com 3 níveis e com uma velocidade de propagação variável no sedimento que separa a coluna de água e o fundo marinho. Duma forma mais concreta, determinemos a solução analítica da ED Eq.(3.14), para o caso em que:

$$\rho(z), c(z) = \begin{cases} \rho_1 & , & c_1 & , & 0 \leq z \leq D_1 \\ \rho_2 & , & \frac{c_2}{\sqrt{1 - k_0(z - D_1)}} & , & D_1 \leq z \leq D_2 \\ \rho_3 & , & c_3 & , & D_2 \leq z \leq \infty \end{cases} , \quad (4.1)$$

com  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ , e  $c_1 < c_2 < c_3$  e em conjunto com as seguintes CF:

$$Z_1(z = 0) = 0 , \quad (4.2)$$

$$Z_1(z = D_1) = Z_2(z = D_1) , \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{dZ_1}{dz} \Big|_{z=D_1} = \frac{1}{\rho_2} \frac{dZ_2}{dz} \Big|_{z=D_1} , \quad (4.4)$$

$$Z_2(z = D_2) = Z_3(z = D_2) , \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{dZ_2}{dz} \Big|_{z=D_2} = \frac{1}{\rho_3} \frac{dZ_3}{dz} \Big|_{z=D_2} , \quad (4.6)$$

e ainda a condição

$$Z_3(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0 , \quad (4.7)$$

onde  $Z_i$  ( $i=1,2,3$ ) representa a função  $Z(z)$  em cada nível. Não é difícil ver que as soluções de Eq.(3.14) + Eq.(4.2) e de Eq.(3.14) + Eq.(4.7) são:

$$Z_1(z) = A \sin(\sqrt{\gamma_1^2 - k^2} z) , \quad (4.8)$$

$$Z_3(z) = C \exp \left[ -\sqrt{k^2 - \gamma_3^2} (z - D_2) \right] , \quad (4.9)$$

onde  $\gamma_{1,3} = \omega/c_{1,3}$ . A ED Eq.(3.14) na segunda camada terá explicitamente o seguinte aspecto:

$$\frac{d^2 Z_2(z)}{dz^2} + \left\{ \gamma_2^2 [1 - k_0 (z - D_1)] - k^2 \right\} Z_2(z) = 0 , \quad (4.10)$$

e onde  $\gamma_2 = \omega/c_2$ . Fazendo a mudança de variável

$$\xi = \frac{c(z - D_1) + b}{c^{2/3}} ,$$

com  $b = k^2 - \gamma_2^2$  e  $c = \gamma_2^2 k_0$ , podemos reescrever a Eq.(4.10) na forma:

$$\frac{d^2 Z_2}{d\xi^2} - \xi Z_2(\xi) = 0 , \quad (4.11)$$

cuja solução geral será [30, 32]

$$Z_2(\xi) = B_1 Ai(\xi) + B_2 Bi(\xi) , \quad (4.12)$$

e onde  $Ai(x)$  e  $Bi(x)$  são as chamadas funções de Airy ( ver Apêndice 1 ). Podemos reescrever então o sistema Eq.(4.3) - Eq.(4.6) como um sistema linear de equações para os coeficientes desconhecidos  $A$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  e  $C$  :

$$Aa_{11} - B_1 a_{12} - B_2 a_{13} = 0 , \quad (4.13)$$

$$Aa_{21} - B_1a_{22} - B_2a_{23} = 0 , \quad (4.14)$$

$$B_1a_{32} + B_2a_{33} - C = 0 , \quad (4.15)$$

$$B_1a_{42} + B_2a_{43} + Ca_{44} = 0 , \quad (4.16)$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) da matriz do sistema estarão definidos da maneira seguinte:

$$a_{11} = \sin \left( \sqrt{\gamma_1^2 - k^2} D_1 \right) , \quad (4.17)$$

$$a_{12} = Ai [\xi(D_1)] , \quad (4.18)$$

$$a_{13} = Bi [\xi(D_1)] , \quad (4.19)$$

$$a_{21} = (\rho_1/\rho_2) \sqrt{\gamma_1^2 - k^2} \cos \left( \sqrt{\gamma_1^2 - k^2} D_1 \right) , \quad (4.20)$$

$$a_{22} = c^{1/3} \left. \frac{d}{dz} Ai [\xi(z)] \right|_{z=D_1} , \quad (4.21)$$

$$a_{23} = c^{1/3} \left. \frac{d}{dz} Bi [\xi(z)] \right|_{z=D_1} , \quad (4.22)$$

$$a_{32} = Ai [\xi(D_2)] , \quad (4.23)$$

$$a_{33} = Bi [\xi(D_2)] , \quad (4.24)$$

$$a_{42} = c^{1/3} \left. \frac{d}{dz} Ai [\xi(z)] \right|_{z=D_2} , \quad (4.25)$$

$$a_{43} = c^{1/3} \left. \frac{d}{dz} Bi [\xi(z)] \right|_{z=D_2} , \quad (4.26)$$

$$a_{44} = (\rho_2/\rho_3) \sqrt{k^2 - \gamma_3^2} . \quad (4.27)$$

Para garantir a existência duma solução não trivial do sistema exigiremos que o determinante da matriz seja igual a zero. A equação transcendental resultante deverá ter, pelo menos, um número finito de raízes que correspondem aos valores próprios dum problema singular de Sturm – Liouville, em que os  $k_n^2$  estão presentes nas próprias CF.

Uma vez calculados os  $k_n^2$  podemos fazer  $A = 1$  e calcular os restantes coeficientes na forma:

$$B_1 = \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}, \quad (4.28)$$

$$B_2 = \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}, \quad (4.29)$$

$$C = B_1a_{32} + B_2a_{33}. \quad (4.30)$$

A função assim obtida pode ser normalizada se dividirmos por  $\sqrt{I}$ :

$$Z(z)_{\text{normalizada}} = \frac{Z(z)}{\sqrt{I}}, \quad (4.31)$$

onde:  $I = I_1 + I_2 + I_3$ , e

$$I_1 = \int_0^{D_1} \frac{1}{\rho_1} \sin^2 \left( \sqrt{\gamma_1^2 - k^2} z \right) dz, \quad (4.32)$$

$$I_2 = \int_{D_1}^{D_2} \frac{1}{\rho_2} (B_1 Ai(\xi) + B_2 Bi(\xi))^2 dz, \quad (4.33)$$

$$I_3 = \int_{D_2}^{\infty} \frac{1}{\rho_3} C^2 \exp \left[ 2\sqrt{k^2 - \gamma_3^2} (z - D_2) \right] dz, \quad (4.34)$$

A expressão analítica necessária para o cálculo de  $I_2$  pode ser encontrada no Apêndice 1.

## 4.2 Implementação da Solução Analítica

As expressões analíticas obtidas no ponto anterior foram implementadas com ajuda do *SOLAN*, um conjunto de programas em FORTRAN-77 que pode ser dividido formalmente em duas componentes. A primeira delas ( o *SOLAN 1* ) tem por função principal calcular os  $k_n$  a partir da informação contida no ficheiro de dados *data.in*. O núcleo principal de *SOLAN 1* é constituído pelas subrotinas *coef.f* e *f.f* ( ver Fig.4.1 ) que calculam respectivamente os coeficientes do determinante e o valor do determinante. No instante em que é detectada uma variação de sinal neste último ( o que quer dizer que no intervalo dado de valores de  $k$  existe

um valor  $k_n$  em que o determinante é nulo ) a subrotina *f.f* recorre à livreria de programas em FORTRAN de *NAG* para determinar o zero correspondente ( i. e. o valor próprio ) com uma precisão de 16 dígitos exactos. O intervalo de existência dos  $k_n$  encontra-se limitado pelos valores de  $\omega/c_{\max}$  e  $\omega/c_{\min}$  onde  $c_{\min}$  e  $c_{\max}$  correspondem aos valores mínimo e máximo do perfil de velocidade. Os valores próprios vão sendo acumulados no ficheiro de dados *eigv.d* até ao momento em que é alcançado o extremo superior do intervalo de procura.

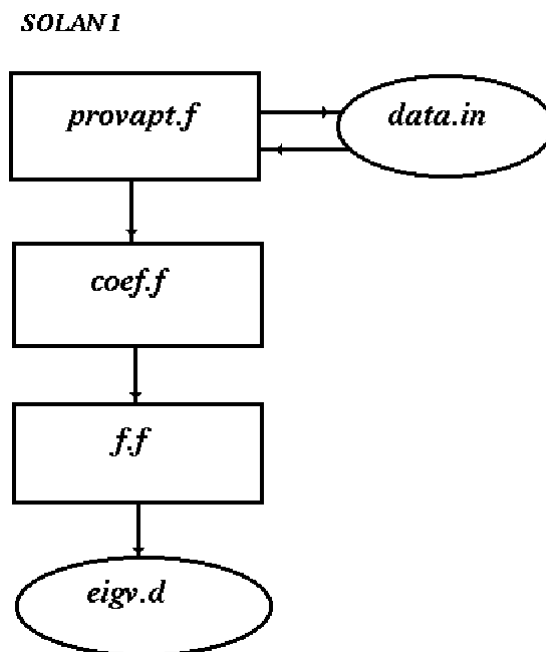


Figura 4.1: Diagrama de blocos do SOLAN 1.

A segunda componente ( o *SOLAN 2* ) agrupa um maior número de programas que, com excepção do programa *modes.f*, permitem o cálculo de TL a partir da informação contida em *data.in* e em *eigv.d* ( ver Fig.4.2 ). Destacam-se em *SOLAN 2* as subrotinas *format.f* e *fmcontur.f*, inicialmente usadas na implementação do *KRAKEN* e do *FEPE* com o objectivo de adaptar o formato original dos ficheiros de dados, de cada um destes modelos, ao formato usado pelos pacotes gráficos *XPLOT* e *viewcdr.m*. A recorrência das diferentes subrotinas em *SOLAN 1* e *SOLAN 2* às livrerias de *NAG* explica-se primordialmente por duas razões. A primeira consiste na grande precisão que pode ser alcançada tanto no cálculo dos valores

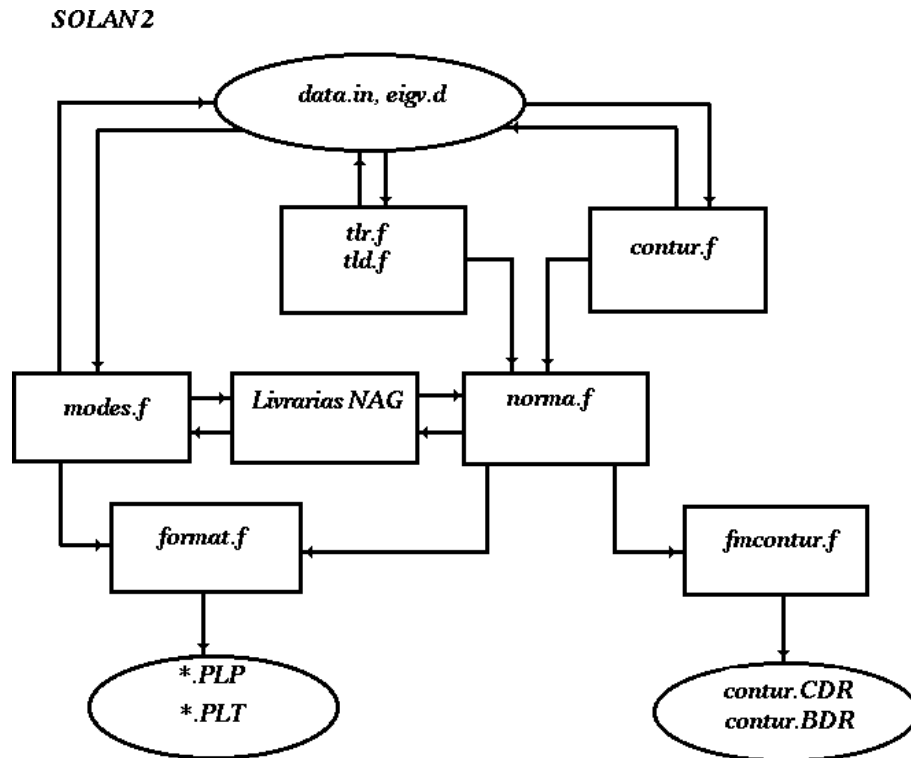


Figura 4.2: Diagrama de blocos do SOLAN 2.

próprios, como das diferentes funções especiais, usadas na solução analítica. A segunda e não menos importante razão esta relacionada com as excelentes qualidades técnicas ( eficiência, estabilidade, facilidade de manipulação, etc. ) das subrotinas de NAG.

### 4.3 Comparação

Cada um dos Modelos de Propagação comentados neste trabalho depende duma ou doutra maneira dos diferentes parâmetros dum problema específico de propagação. O grupo de comparações entre os resultados de SOLAN e os resultados de cada modelo ( material gráfico mostrado da página 41 até a página 49 ) foi realizado primordialmente da seguinte forma: inicialmente é escolhido um *shallow water problem*, em que a profundidade da coluna de água corresponde a 200 m. É a partir deste problema que se procede à comparação, modificando progressivamente um dos varios parâmetros requeridos pelo modelo, até alcançar um grau

satisfactorio de precisão. O conjunto dado de variações é ilustrado por um único gráfico com curvas diferentes, em que cada curva corresponde a um determinado valor do parâmetro escolhido. Uma vez esgotada a escolha dos parâmetros é realizada uma breve comparação com um caso ( denominado formalmente um *deep water problem* ) em que o fundo marinho se encontra a 1000 m de profundidade. Os valores de frequência, velocidade de propagação e densidade, podem ser encontrados com alguma frequência na literatura sobre Acústica Submarina. Em todos os gráficos de TL os resultados do SOLAN encontram-se representados por uma linha contínua. Cada gráfico vai acompanhado de comentários explicativos. Os tempos de cálculo encontram-se reunidos na Tabela N.4.1, Tabela N.4.2 e Tabela N.4.3.

Comparação entre SOLAN e KRAKEN: 1) Os modos de propagação

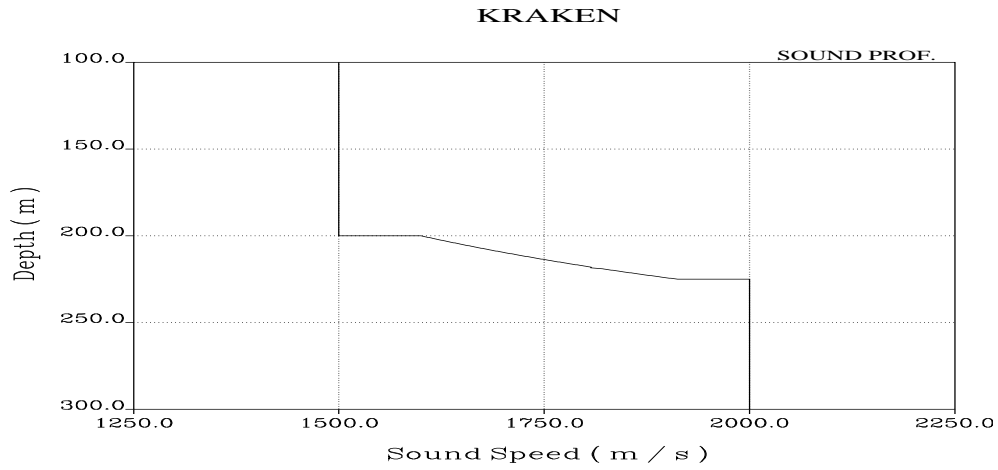


Figura 4.3: Perfil de velocidade usado no *shallow water problem*.

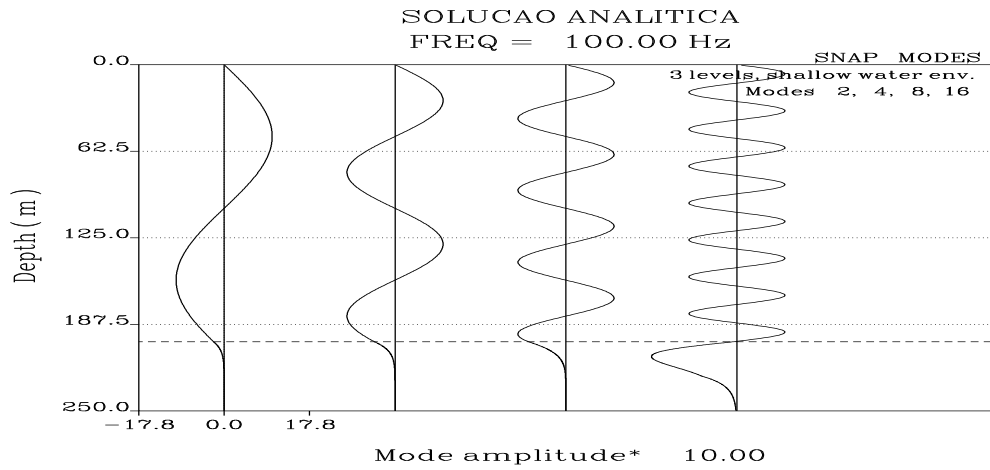


Figura 4.4: Modos não normalizados calculados com SOLAN. A linha tracejada indica a profundidade da coluna de água.

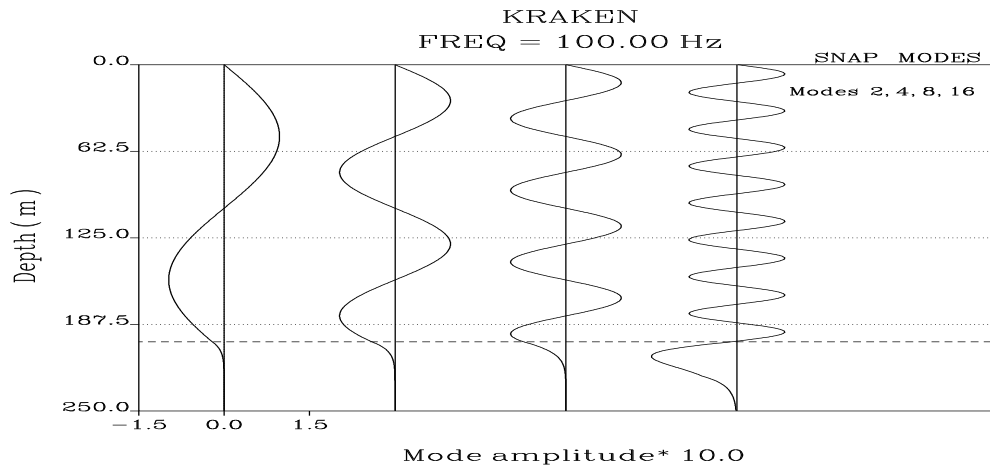


Figura 4.5: Modos calculados pelo KRAKEN.

Comparação entre SOLAN e KRAKEN:  
 2) O TL calculado usando a interpolação linear de  $c(z)$ .

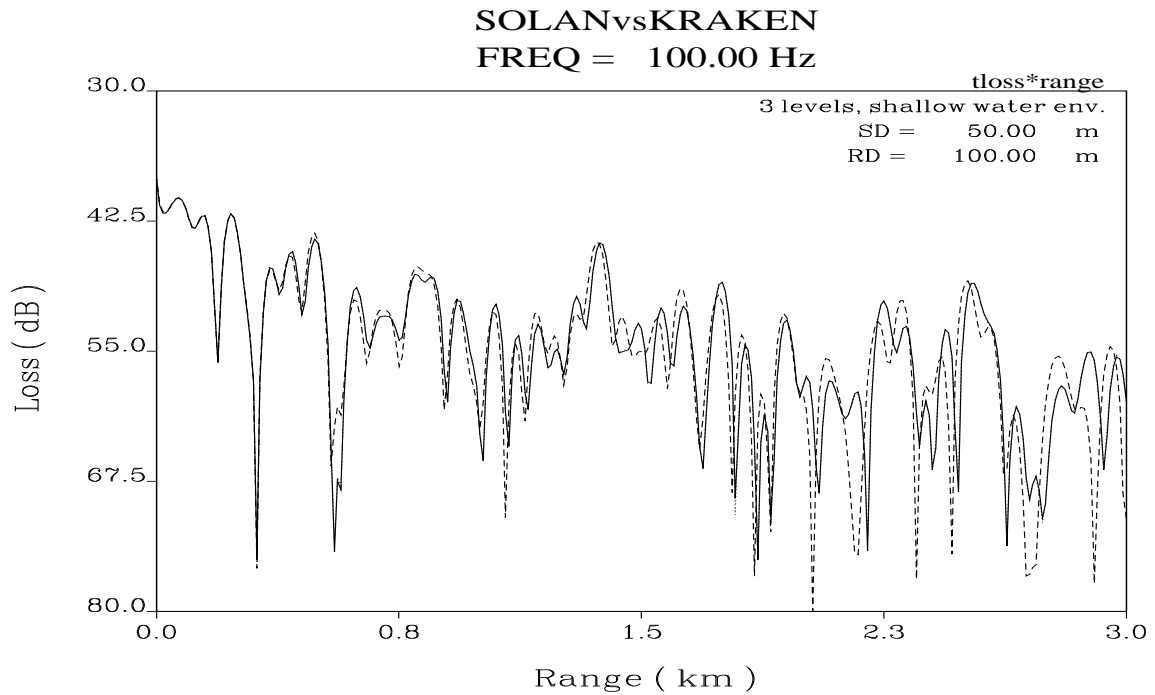


Figura 4.6: Na proximidade da fonte é suficiente usar 6 pontos no perfil de velocidade ( linha  $\cdots$  ) para garantir a convergência dos resultados do KRAKEN. A linha tracejada corresponde ao TL obtido com 2 pontos de  $c(z)$ .

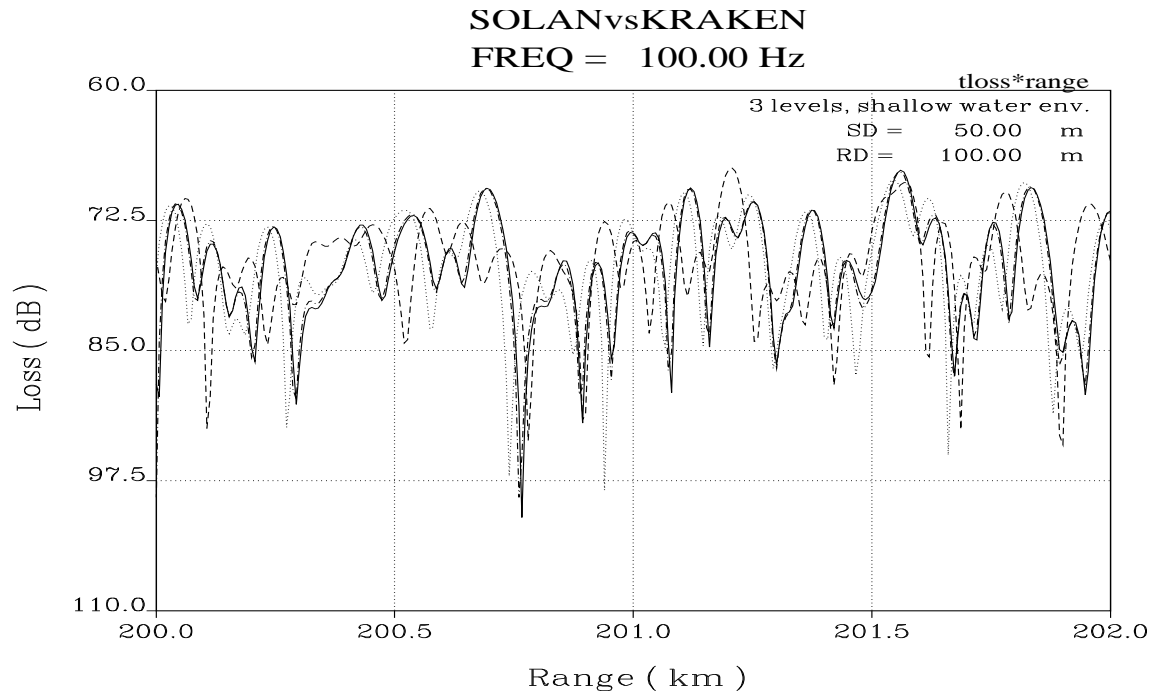


Figura 4.7: Com o incremento de  $r$  os 6 pontos em  $c(z)$  resultam insuficientes para garantir a convergência do KRAKEN ( linha tracejada ). A precisão é recuperada aumentando o número de pontos no perfil: linha  $\cdots$ , 12 pontos; linha  $- \cdot -$ , 26 pontos.

Comparação entre SOLAN e KRAKEN:  
 3) O TL calculado com outros tipos de interpolação.

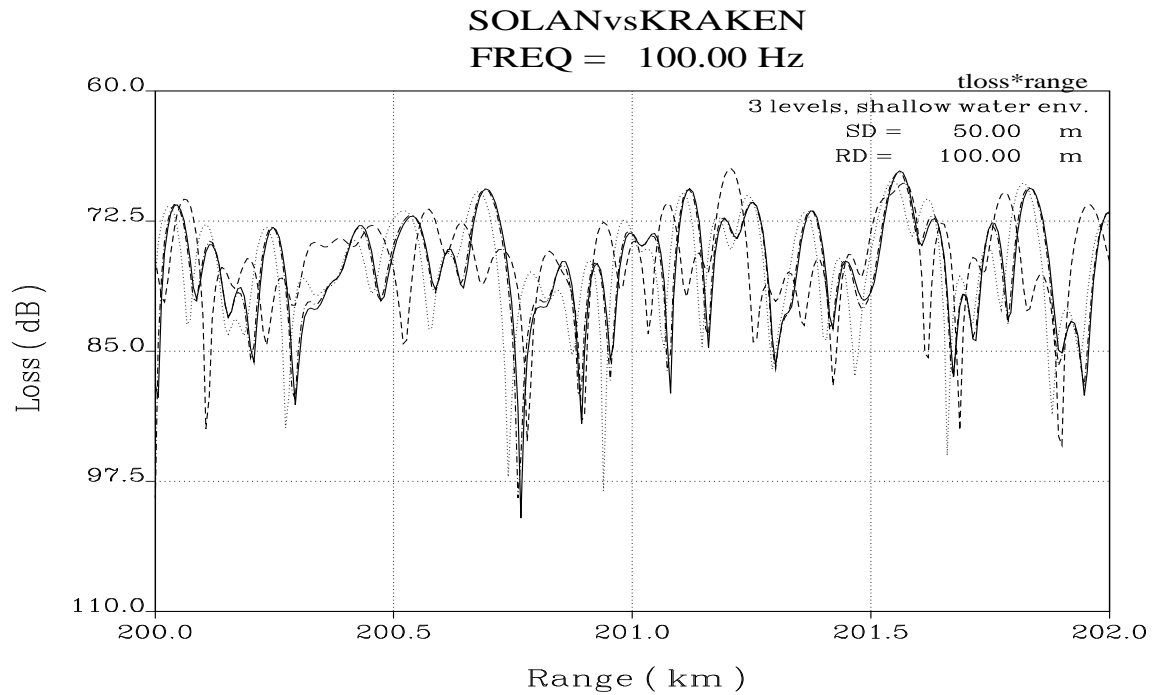


Figura 4.8: Interpolação com Splines. Linha tracejada, 2 pontos; linha  $\cdots$ , 4 pontos; linha  $- \cdot -$ , 6 pontos. Repare-se no incremento significativo da precisão.

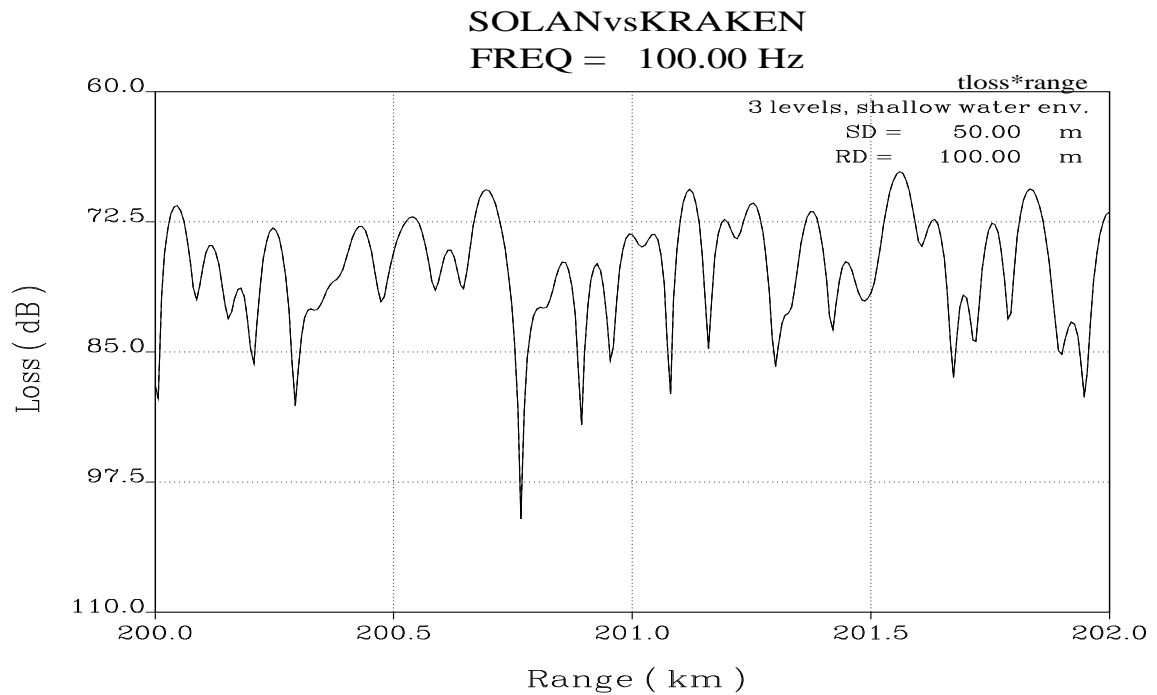


Figura 4.9: Interpolação “N” ( $c(z) = c_0\sqrt{az + b}$ ), dois pontos. O resultado do KRAKEN ( linha tracejada ) é indistinguível de SOLAN.

Comparação entre SOLAN e KRAKEN: 4) Um *deep water problem*.

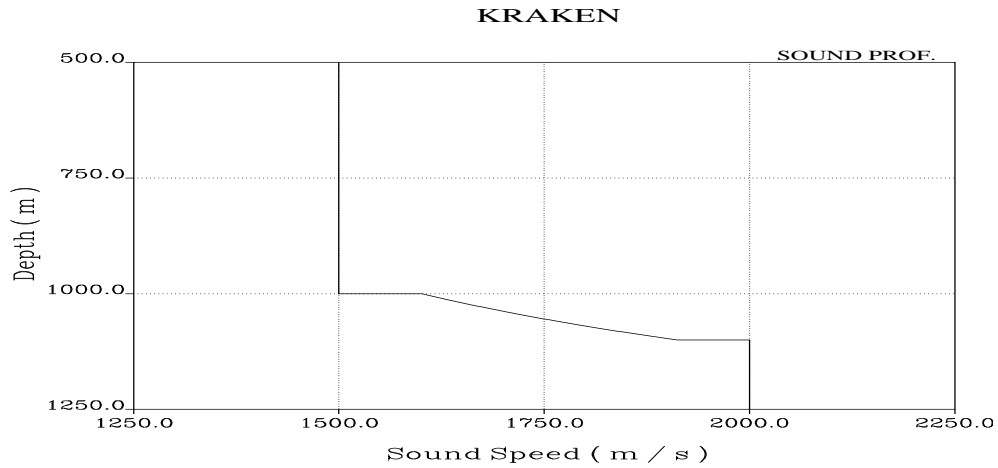


Figura 4.10: Perfil de velocidade usado no *deep water problem*.

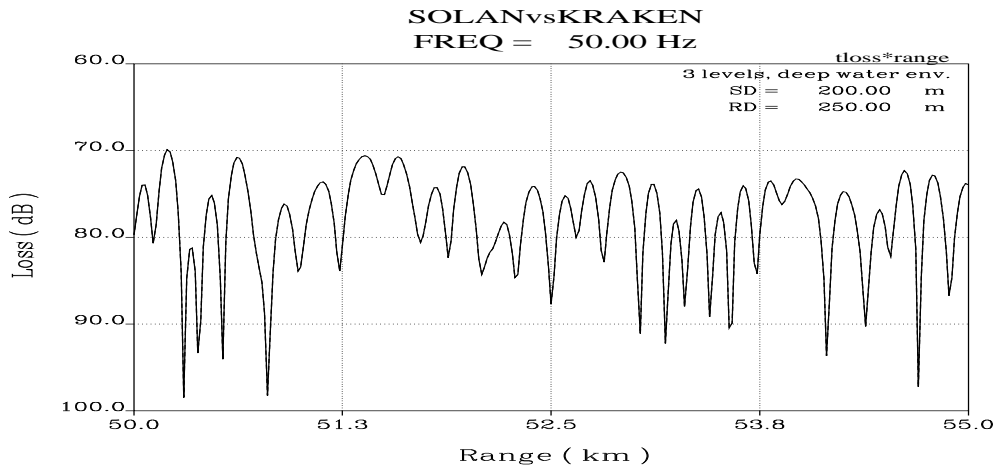


Figura 4.11: TL vs range longe da fonte, interpolação “N”.

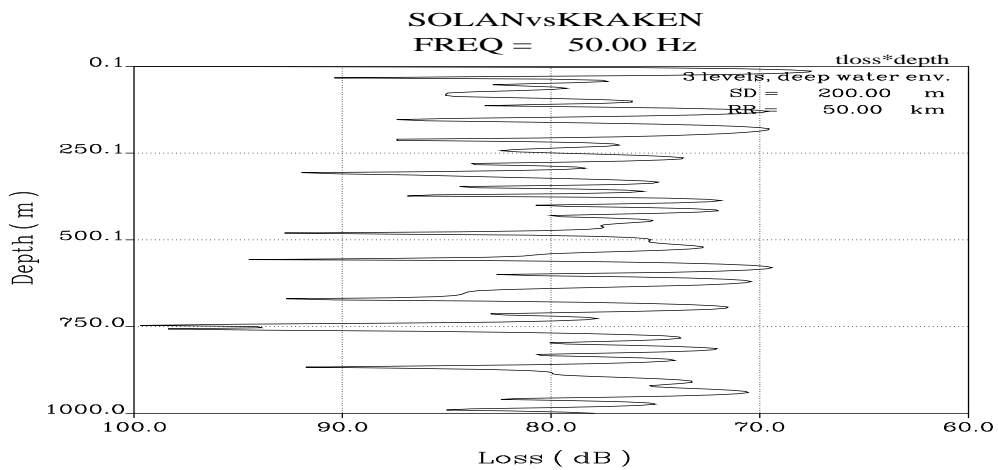
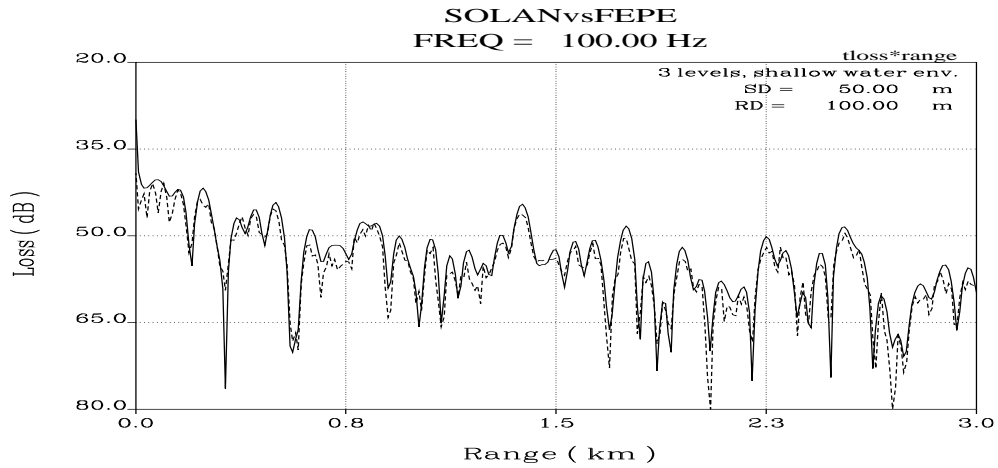
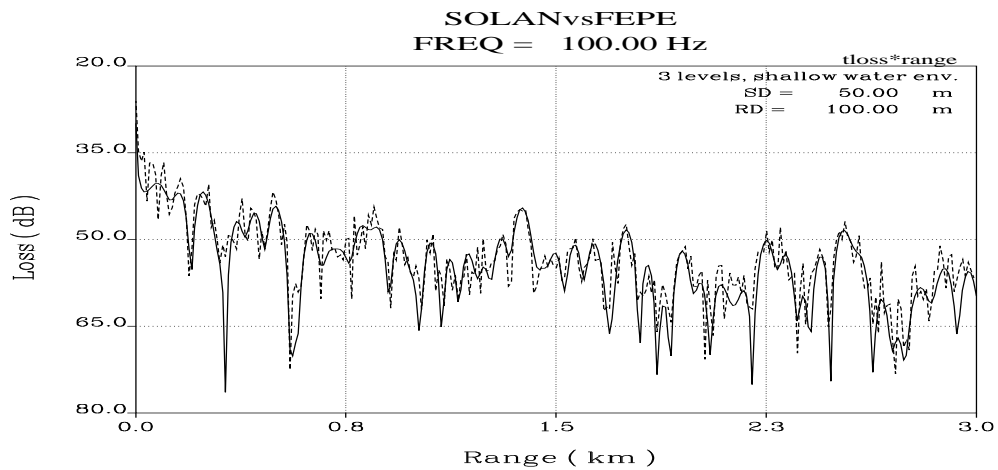


Figura 4.12: TL vs depth longe da fonte, interpolação “N”.

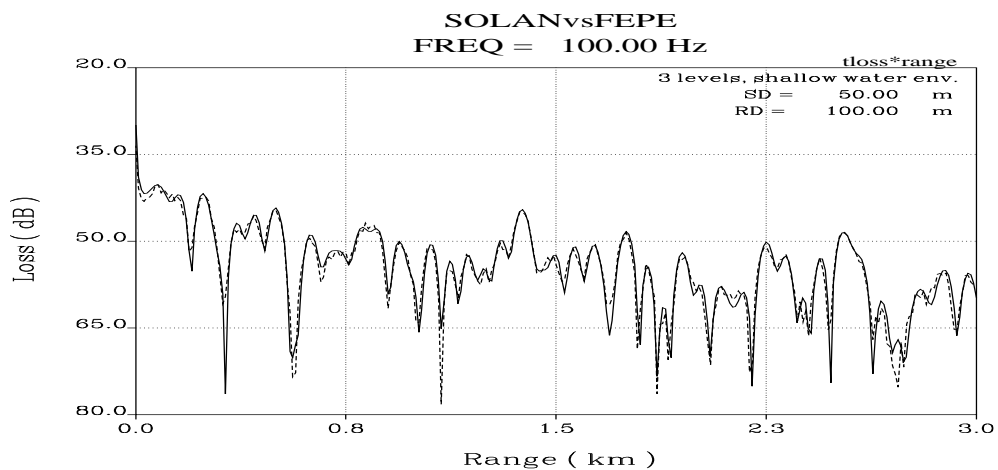
Comparação entre SOLAN e FEPE: 1) Os diferentes Starters.



(a) Gauss Starter.



(b) Green Starter.



(c) Homogeneous Mode Starter.

Figura 4.13: Resultados obtidos no *shallow water problem* com diferentes starters. As diferenças de amplitude entre SOLAN e FEPE têm a ver com o facto de cada starter corresponder a uma *aproximação* do campo acústico original na proximidade da fonte.

Comparação entre SOLAN e FEPE: 2) Diferentes cenários de propagação.

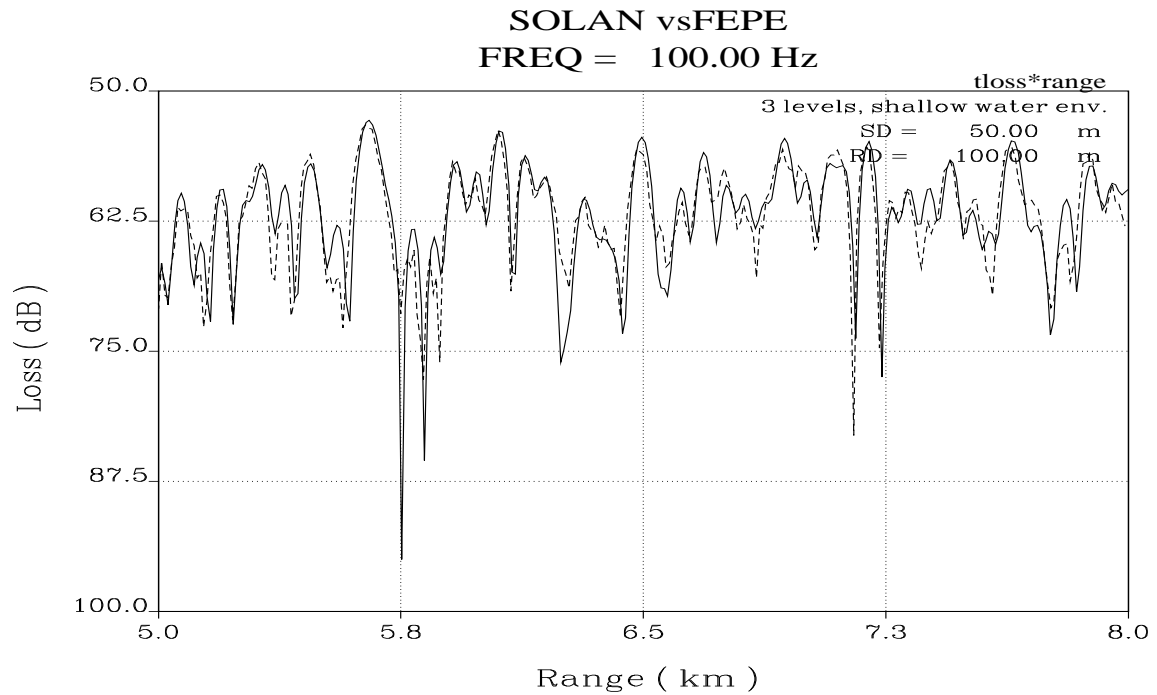


Figura 4.14: Com o incremento de  $r$  no *shallow water problem* a solução do FEPE usando o Homogeneous mode starter ( linha tracejada ) mantém o seu grau de aproximação a SOLAN.

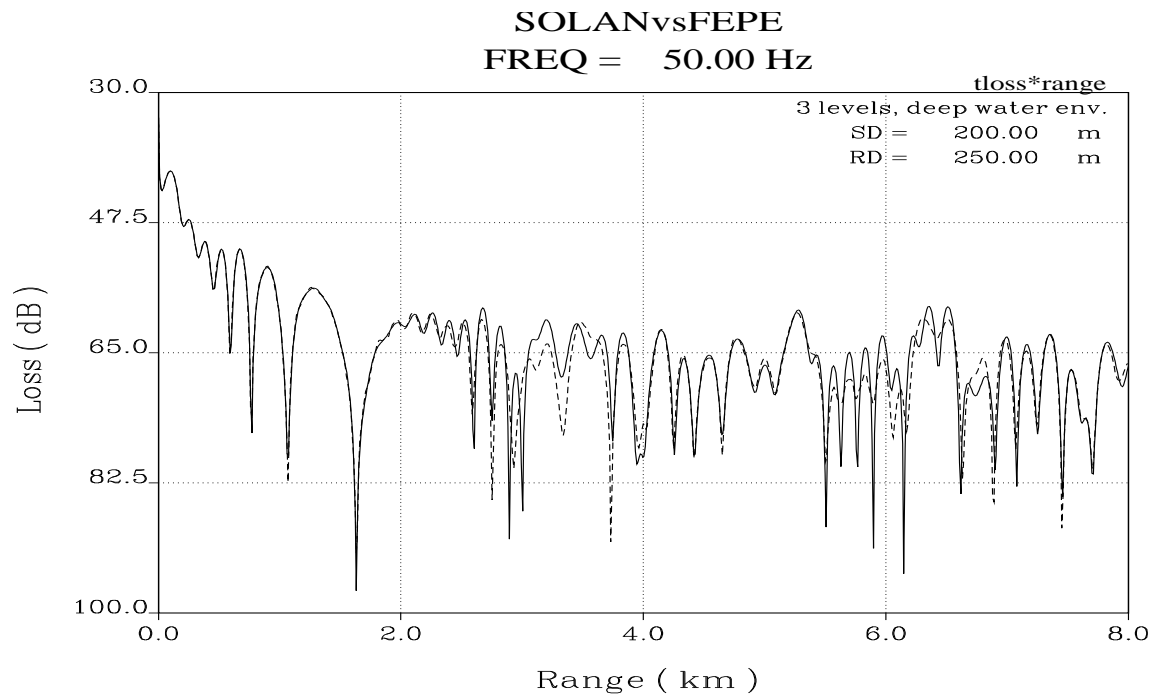


Figura 4.15: No *deep water problem* a solução do FEPE mostra-se igualmente próxima a SOLAN, em especial na vizinhança da fonte.

Comparação entre SOLAN e SAFARI: 1) O *shallow water* problem.

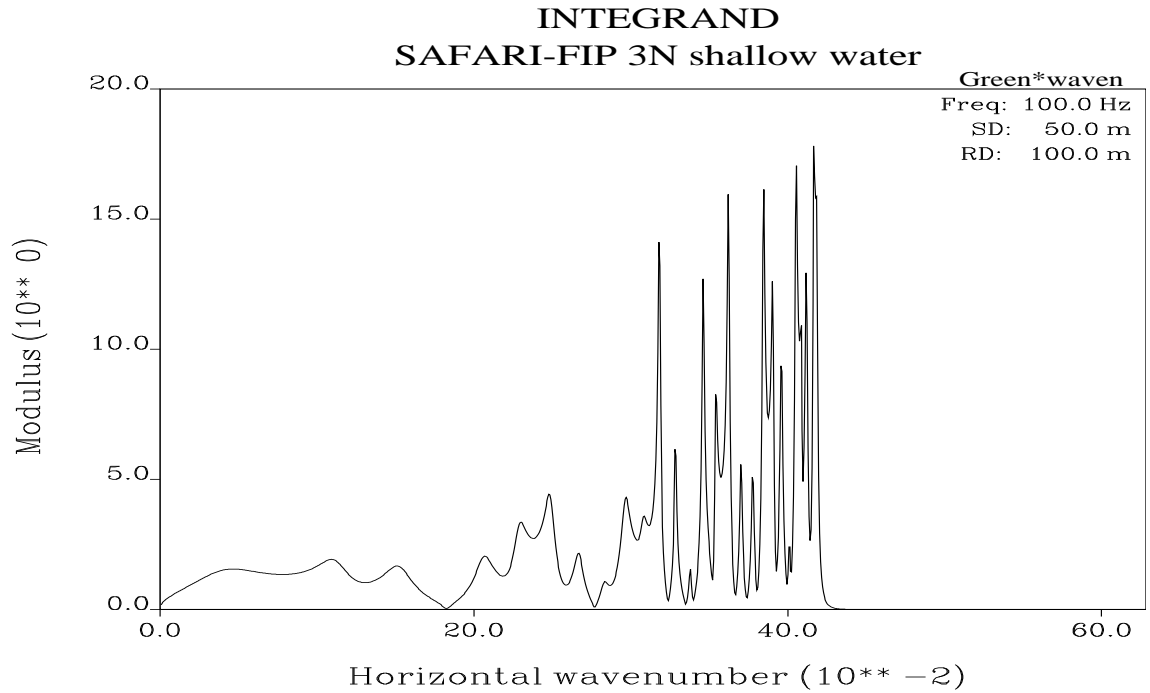


Figura 4.16: Função de Green para o *shallow water* problem. Os máximos intensos estão relacionados com os modos de propagação, i.e. com a parte discreta do espectro da solução.

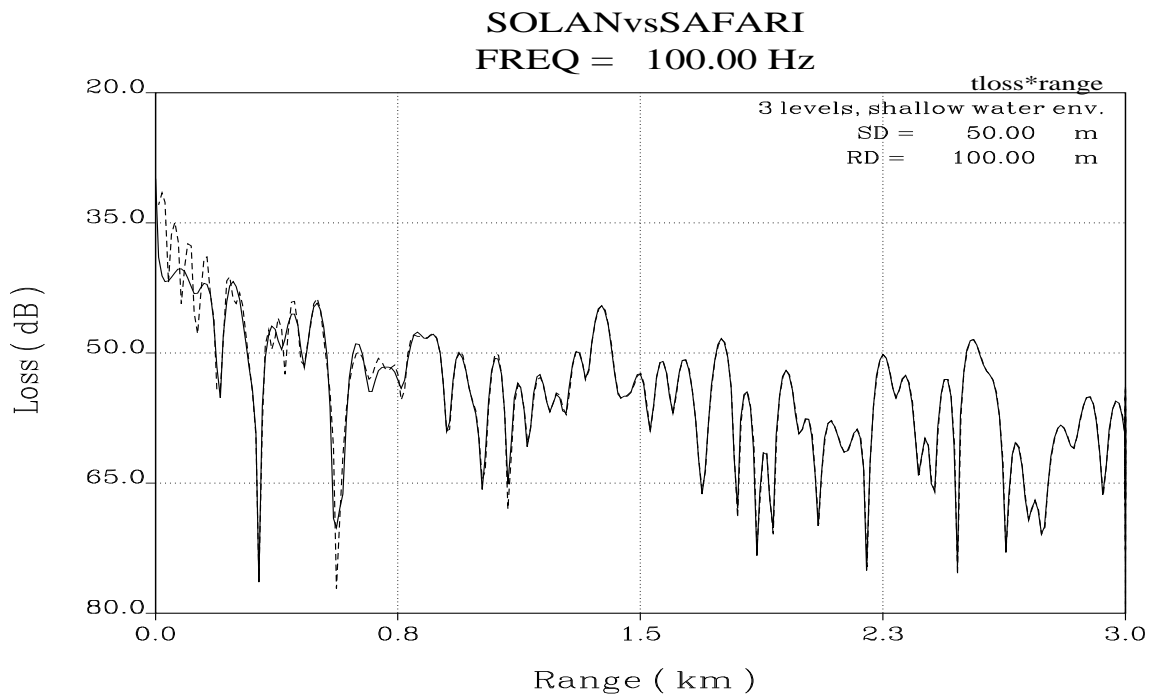


Figura 4.17: As diferenças entre SOLAN e SAFARI na proximidade da fonte estão condicionadas pelo espectro contínuo da solução, que está incluído, conjuntamente com a solução modal, na representação integral usada por SAFARI. Pode notar-se que a parte contínua do espectro decresce rapidamente com o aumento de  $r$ . Interpolação “N”.

Comparação entre SOLAN e SAFARI: 2) O *deep water* problem.

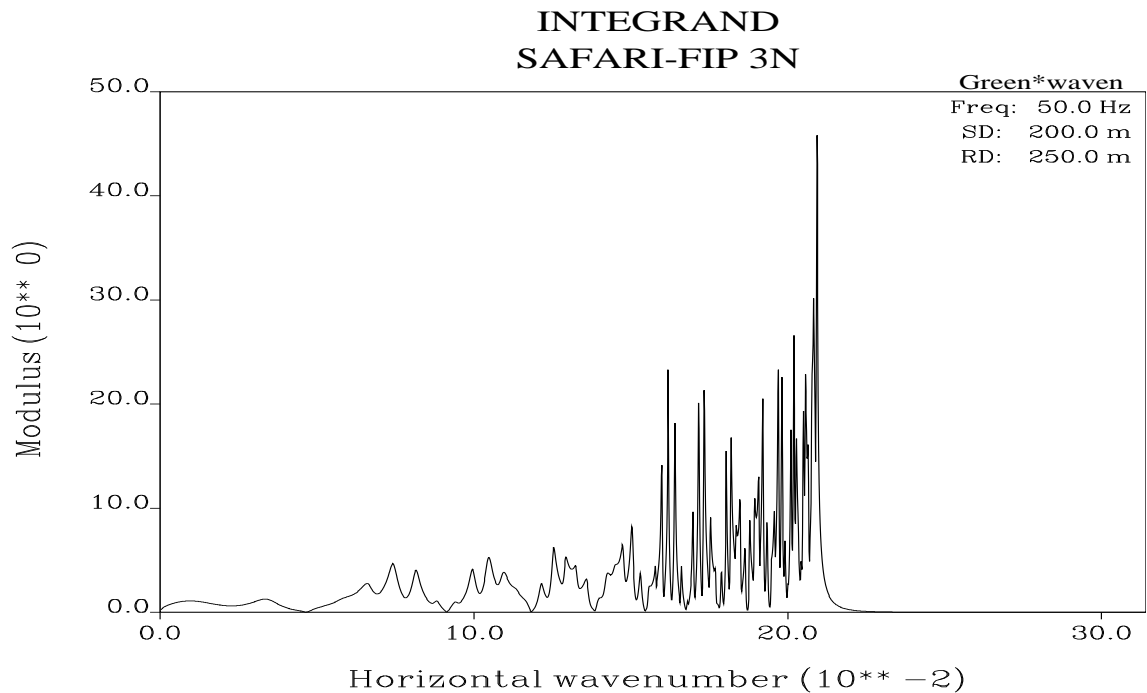


Figura 4.18: Função de Green para o *deep water problem*. Uma guia de onda mais profunda pode dar lugar a um maior número de modos de propagação. Eis a razão pela qual nesta função de Green o número de máximos intensos é maior do que na função de Green do *shallow water problem*.

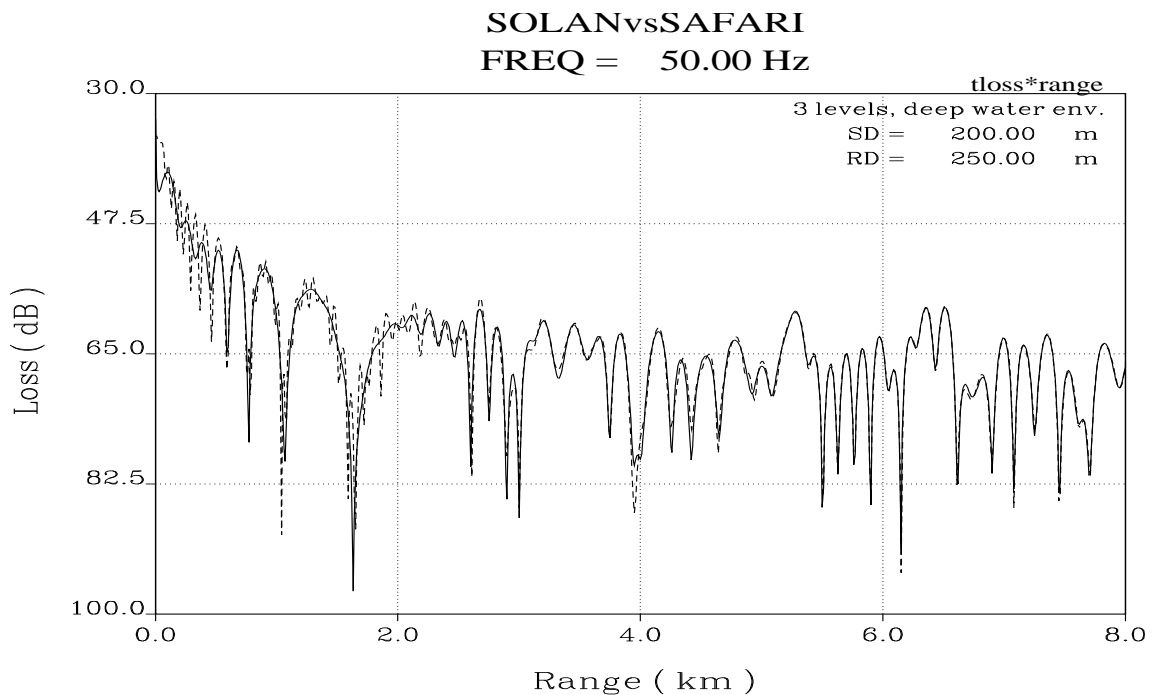


Figura 4.19: Como no *shallow water problem* as diferenças entre SOLAN e SAFARI têm lugar na proximidade da fonte. Com o incremento de  $r$  a solução integral termina por coincidir com a solução modal.

Comparação entre SOLAN e SAFARI: 3) O TL versus profundidade.

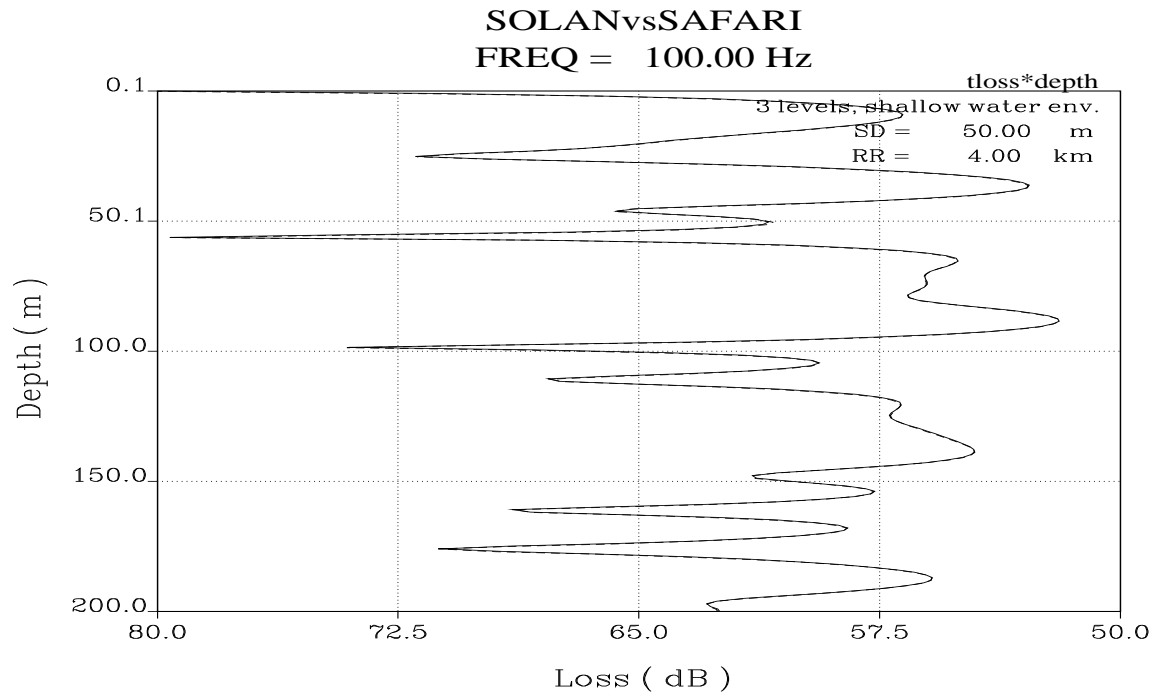


Figura 4.20: Tloss vs depth no shallow water problem. Interpolação “N”.

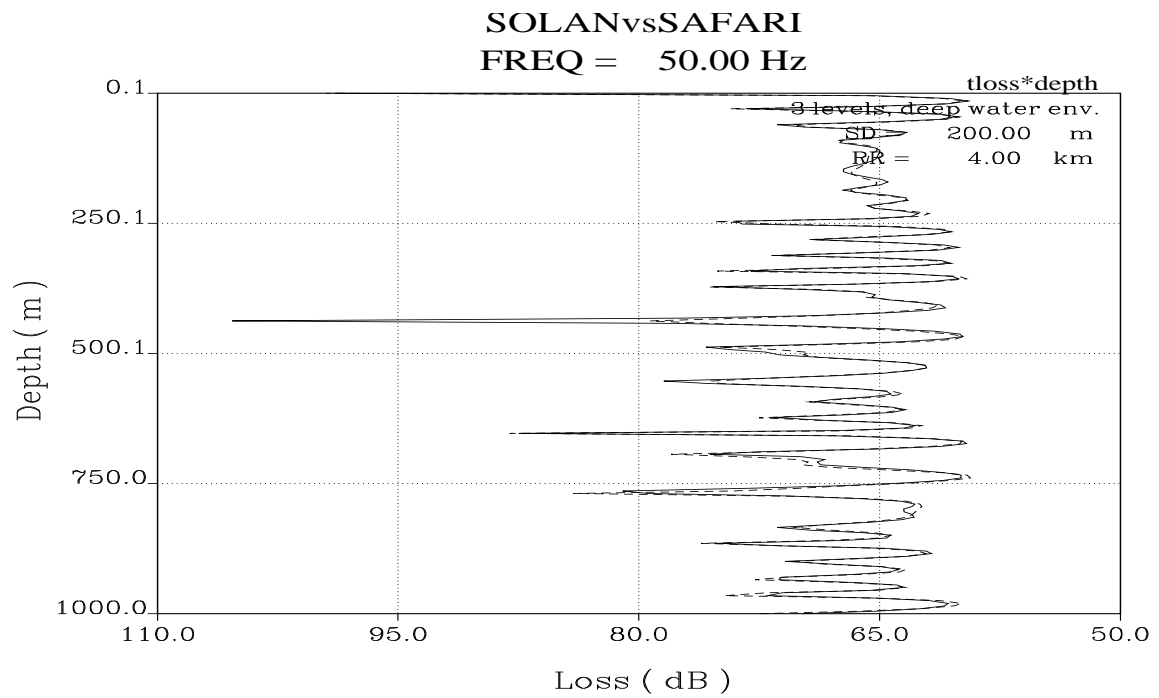


Figura 4.21: Tloss vs depth no deep water problem. Interpolação “N”.

Tempo gasto por cada modelo nos diferentes casos:

KRAKEN*		
Caso	Interpolação/Núm de pontos	Tempo ( s )
Shallow water	Linear, 2	10.10
Shallow water	Linear, 6	10.28
Shallow water	Linear, 12	10.01
Shallow water	Linear, 26	10.11
Shallow water	Splines, 6	10.36
Shallow water	Splines, 12	10.29
Shallow water	Splines, 26	10.38
Shallow water	N, 2	12.03
Deep water	N, 2	25.35

Tabela 4.1:

FEPE*		
Caso	Interpolação/Núm de pontos	Tempo ( s )
Shallow water	Linear, 52	252.3
Deep water	Linear, 52	3275.7

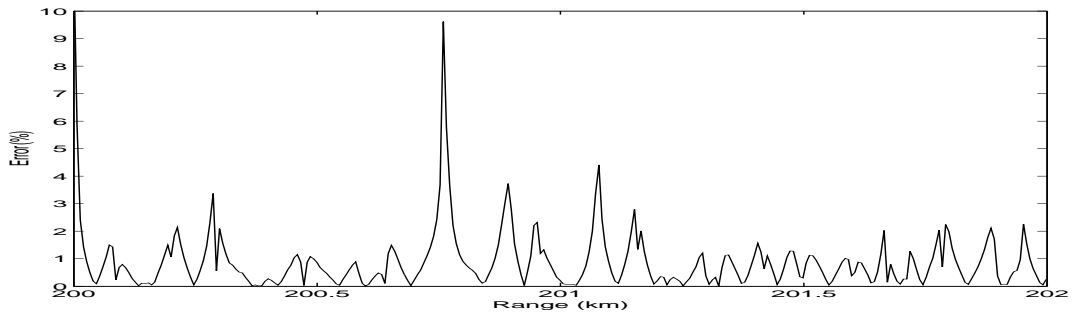
Tabela 4.2:

SAFARI*		
Caso	Interpolação/Núm de pontos	Tempo ( s )
Shallow water	Linear, 2	2.83
Deep water	N, 2	5.57

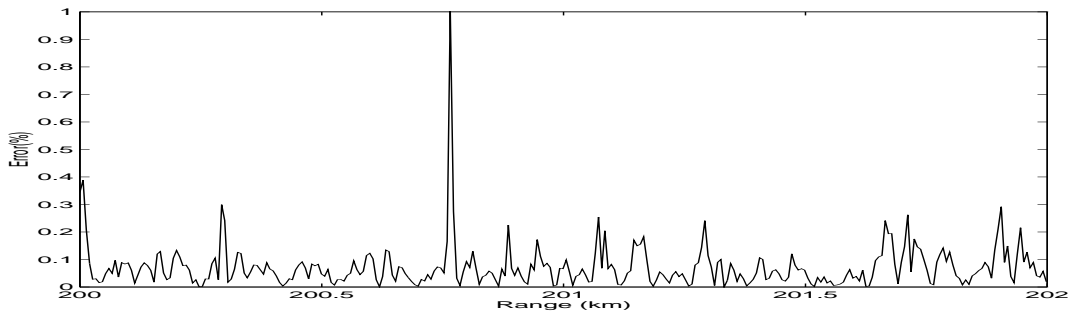
Tabela 4.3:

\*Cálculos realizados numa HP modelo quotesapollo 715/33 com 16 Mbytes de RAM. Os tempos gastos pelo SOLAN no *shallow water problem* e no *deep water problem* foram 51.54 e 55.64 segundos respectivamente.

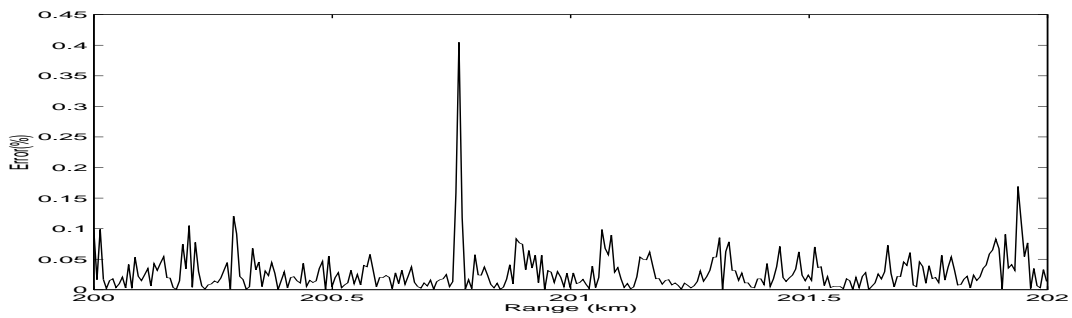
Percentagem de Erro dos diferentes Modelos ( *Sallow water* ):



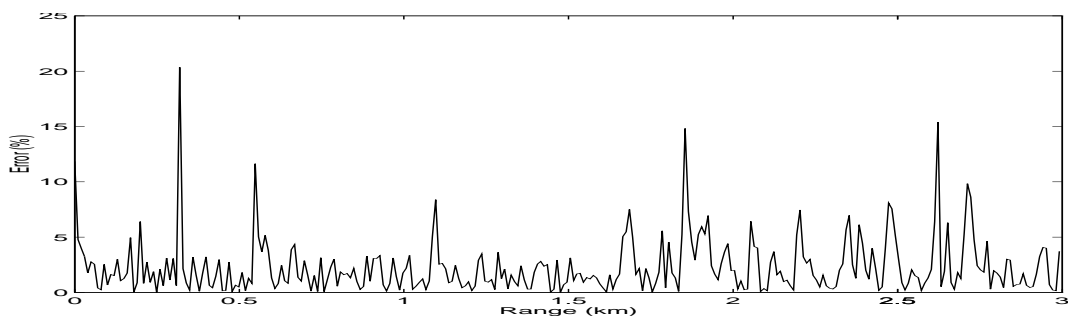
(a) KRAKEN: Interpolação Linear, 26 pontos.



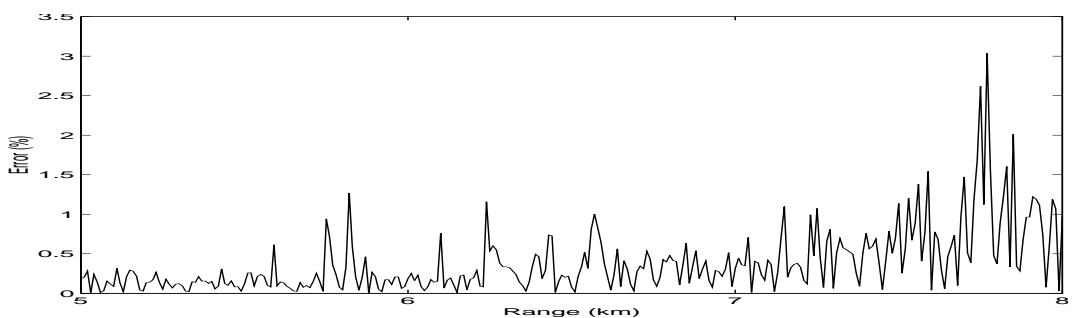
(b) KRAKEN: Interpolação com Splines, 6 pontos.



(c) KRAKEN: Interpolação "N", 2 pontos.



(d) FEPE: Interpolação Linear, 52 pontos.



(e) SAFARI: Interpolação "N", 2 pontos.



# Capítulo 5

## Conclusões

As características dos modelos de propagação que surgem neste trabalho não se limitam de modo algum ao material apresentado ao longo dos seus diferentes capítulos. A Acústica Submarina e os modelos de propagação representam um campo extremamente amplo, cuja análise detalhada ultrapassa de longe as margens dos diferentes temas aqui tratados. No entanto, é importante expor os elementos fundamentais de cada uma das implementações numéricas das soluções da EH, racionalizando desta maneira o uso dum modelo específico de propagação de acordo com o tipo de cenário a ser analisado e tendo conhecimento da precisão dos resultados obtidos. São as seguintes as conclusões deste trabalho:

- 1) O NMM KRAKEN revela-se como um modelo extremamente eficaz, estável, rápido e simples de usar. O factor decisivo de convergência dos resultados do KRAKEN encontra-se determinado pelo cálculo preciso dos valores próprios do problema de Sturm–Liouville. Neste sentido, e tendo em conta a relativa independência entre o tempo de cálculo e o número de pontos no perfil de velocidade ( ver Tabela N.??, no caso *shallow water* ), a variante mais recomendável para conservar a convergência, tanto na vizinhança como a grandes distâncias da fonte, consistiria em usar um perfil detalhado de  $c(z)$ . A comparação entre SOLAN e KRAKEN mostrou diferenças significativas entre os diferentes tipos de interpolação da

velocidade de propagação ( ver pag. 51, casos a), b) e c) ). O valor máximo da percentagem de erro, alcançado pela interpolação com Splines foi de 1 % no caso de 6 pontos, o que constitui uma melhoria significativa da aproximação à solução analítica, se tivermos em conta os 10 % de erro alcançados na interpolação linear e com 26 pontos no perfil. Destaca-se igualmente a melhoria na precisão alcançada pelo modelo, com apenas dois pontos no perfil de velocidade, e a interpolação do tipo “N”, que encaixa perfeitamente no contexto do perfil de velocidade inserido no problema analítico das 3 camadas. Neste último caso o valor máximo da margem de erro alcançou apenas os 0.4 %. Conjuntamente com a excelente precisão alcançada nos diferentes testes de comparação é indispensável sublinhar as capacidades do modelo em analisar meios *range-dependent*, a 2 e 3 dimensões, com ajuda da técnica dos *coupled modes*. Desta maneira podemos ver que o KRAKEN resulta ser ideal para a análise duma extensa variedade de problemas, sempre e quando se pretenda obter a representação do campo acústico em termos da solução modal.

2) O PE FEPE é o único dos modelos de propagação concebido especificamente para meios *range-dependent*. Nesse sentido pode superar as limitações de batimetria do SAFARI. Por regra geral os casos de comparação com soluções modais presentes no manual, ou na bibliografia, revelam-se extremamente precisos, embora seja importante sublinhar que em todos os casos apresentados a velocidade de propagação é considerada constante na coluna de água e no fundo marinho. As comparações de TL entre o SOLAN e o FEPE mostram algumas diferenças, sendo a percentagem máxima de erro da ordem dos 20 %. Estas diferenças podem ser explicadas se tivermos em conta que o FEPE depende fortemente dos parâmetros de discretização do meio, assim como do tipo de starter usado. A maneira mais eficaz para obter um bom resultado consistiria em usar, à partida, valores pequenos de  $\Delta z$  e  $\Delta r$  em

combinação com um grande número de coeficientes de Padé. Esta escolha implica, claro está, um considerável esforço de cálculo ( ver Tabela N.??, na pag. 50 ), mas em compensação representa uma solução otimizada, se tivermos ainda em conta que a versão presente do FEPE não é definitiva, e que os testes revelam problemas de instabilidade ( ver por exemplo a figura 4.11b, os resultados do FEPE com o Green Starter ).

3) A principal das vantagens no uso do FFP SAFARI radica fundamentalmente na representação completa do campo acústico, porquanto a solução integral engloba a soma dos modos e a parte contínua do espectro de propagação. Neste aspecto o SAFARI supera os outros modelos. Como mostram os diferentes testes, os resultados do SAFARI e do SOLAN para grandes distâncias ( ver Figs. 4.15 e 4.17 ) coincidem perfeitamente em fase, embora existam pequenas diferenças de amplitude que podem alcançar o valor máximo de 3 %. Estas diferenças só podem ser explicadas devido aos factores particulares de implementação deste modelo. É indispensável sublinhar os problemas de ordem técnica derivados do uso do SAFARI. Deve verificar-se em detalhe a convergência da solução, que depende dos valores de  $k_{\min}$  e  $k_{\max}$  e da discretização correspondente do intervalo em  $k$ . A escolha dos diferentes parâmetros depende fortemente da intuição física do programador. Considerando que o espectro contínuo da solução perde a sua importância à medida que o sinal acústico se afasta da fonte, o KRAKEN pode oferecer uma alternativa mais simples para obter os mesmos resultados que o SAFARI, nos casos que envolvem grandes distâncias ( ver igualmente as figuras 4.18 e 4.19 ). O SAFARI consegue ser mais rápido que o KRAKEN nos casos de TL versus range, mas nos casos de TL versus depth a situação inverte-se. Isto é fácil de compreender, se repararmos que uma vez calculados os modos de propagação o tempo gasto por KRAKEN no cálculo do TL depende apenas do número de pontos em  $r$  ou em  $z$ . No

SAFARI o TL versus range encontra-se ligado ao cálculo da função de Green correspondente, enquanto que no TL versus depth deve calcular-se uma função de Green para cada valor de profundidade. O SAFARI revela-se assim como um modelo extremamente útil na descrição do campo acústico na proximidade da fonte. Dadas as dificuldades relacionadas com a convergência da solução, ou a discretização em  $r$ , resulta aconselhável estudar com atenção os casos do manual. Modificando os diferentes parâmetros, e analisando os resultados correspondentes, pode ganhar-se confiança na aplicação do SAFARI no caso geral.

4) O RTM BELLHOP não permite considerar a variação da velocidade tanto no sedimento como no fundo marinho. Eis a razão pela qual não foi apresentado nenhum tipo de comparação entre o cálculo de TL com este modelo e o TL de SOLAN. No entanto, como mostram os gráficos do capítulo 3, o BELLHOP permite obter uma representação direccional do campo acústico na guia de onda, revelando aspectos do regime de propagação que passariam despercebidos com um modelo convencional. Por outra parte o tempo de cálculo dos raios de propagação é comparável ao tempo gasto pelo KRAKEN quando usado no mesmo caso. Desta maneira o BELLHOP representa uma alternativa interessante e eficaz, como ferramenta de estudo duma grande variedade de problemas de propagação, sempre e quando o perfil de velocidade usado pelo modelo não apresente variações bruscas de  $c(z)$ .

# Bibliografia

- [1] Tolstoy I. *Ocean Acoustics: Theory and Experiment in Underwater Sound*. Ed. by the Acoustical Society of America, New York, 1987.
- [2] Urick R.J. *Principles of Underwater Sound*. McGraw-Hill, New York, 1983.
- [3] Garnier B., Millet J., Larcher J., and Goulet G. Ship radiated noise measurements on sea: separation of ambient traffic noise from the measurement signatures. In *Proceedings of the Second European Conference on Underwater Acoustics, Vol. I*, Luxembourg, 1994.
- [4] Schmidt H. Seismo Acoustics of the arctic ice cover. In *Proceedings of the Second European Conference on Underwater Acoustics, Vol. II*, Luxembourg, 1994.
- [5] Cesbron N., Alais P., Ollivier F., and Challande P. A 3D underwater acoustic camera. In *Proceedings of the Second European Conference on Underwater Acoustics, Vol. II*, Luxembourg, 1994.
- [6] Quellec B., Bjerrum-Niese C., Bjørno L., Henderson B., Jourdain G., and Ishøy A. High image–data rate transmission in acoustical underwater communications. In *Proceedings of the Second European Conference on Underwater Acoustics, Vol. II*, Luxembourg, 1994.
- [7] Worcester P. and Cornuelle B. A comparison of measured and predicted broadband acoustic arrival patterns. *J. Acoust. Soc. America*, 95(6):3118–3128, June 1994.

- [8] Martin Lauzer F.R., Evennou F., and Mauuary D. GASTOM 90 Acoustic Tomography Experiment. In *Proceedings of OSATES91, A08*, Brest, France, 1991.
- [9] Porter M., Kuperman W., and Shen C. Full-filed inversion of the ocean structure. In *Proceedings of the Second European Conference on Underwater Acoustics, Vol. II*, Luxembourg, 1994.
- [10] Ewing M. and Worzel J. Long range sound transmission. *Geol. Soc. Am.*, 1948. Mem. 27.
- [11] Munk W. and Forbers A. Global ocean warming: an acoustic measure. *J. Phys. Oceanogr.*, 19, 1989.
- [12] Nysten J. and Farmer D. *Natural Mechanisms of Surface Generated noise in the ocean*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1988.
- [13] Buckingham M.J. Ocean acoustic propagation models. Technical Report EUR 13810, Comission of the European Communities, 1991.
- [14] Nielsen P. L. and Børno L. Calculations of Reverberation by applying Back Scattering Functions. In *Proceedings of the Second European Conference on Underwater Acoustics, Vol. I*, Luxembourg, 1994.
- [15] Lim P. and Ozard J. On the underwater acoustic field of a moving point source. Part I: Range – independent environment; Part II: Range – dependent environment. *J. Acoust. Soc. America*, January 1994.
- [16] Porter M. *The KRAKEN normal mode program*. SACLANT UNDERSEA RESEARCH (memorandum), San Bartolomeo, Italy, 1991.

- [17] Landau L.D. and Lifshitz E.M. *Plasticity Theory, VII Volume of Theoretical Physics*. Nauka, Moscow (in russian), 1987.
- [18] Lyons A. P. and Anderson A. L. Acoustic scattering from the seafloor: Modelling and data – comparison. *J. Acoust. Soc. America*, 56(2):447–458, May 1994.
- [19] Butykov E.I. *Optics*. Vyshaya Shkola, Moscow (in russian), 1986.
- [20] Butkov E. *Física Matemática*. Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1988.
- [21] Bucker H.P. A simple 3-D Gaussian beam sound propagation model for shallow water. *J. Acoust. Soc. America*, 95(5), May 1994.
- [22] Collins M. D. *FEPE – User’s guide*. NORDA, Tech. Note 365, MS 39529, (NORD, Stennis Space center), 1988.
- [23] Jensen F., Kuperman W., Porter M., and Schmidt H. *Computational Ocean Acoustics*. AIP Series in Modern Acoustics and Signal Processing, New York, 1994.
- [24] Collins M. D. The adiabatic mode parabolic equation. *J. Acoust. Soc. America*, 94(4), October 1993.
- [25] Kampanis N. A. *Galerkin – Finite Element Methods for Interface Problems in Underwater Acoustics*. PhD. Thesis, Department of Mathematics, University of Crete, May, 1992.
- [26] Claerbout J. F. Coarse grid calculations of waves in inhomogeneous media with application to delineation of complicated seismic structure. *Geophysics*, 35(3), June 1970.
- [27] Claerbout J. F. *Fundamentals of Geophysical Data Processing with applications to petroleum prospecting*. Blackwell Scientific Publications, 2nd. Edition, 1985.

- [28] Scheid F. *Análise Numérica*. McGraw-Hill, 2a. edição, Lisboa, Portugal, 1991.
- [29] Collins M. D. and Evans R. B. A two-way parabolic equation for acoustic backscattering in the ocean. *J. Acoust. Soc. America*, 91(3), March 1992.
- [30] Schmidt H. *SAFARI, Seismo-Acoustic Fast field Algorithm for Range – Independent environments. User’s Guide*. SACLANT UNDERSEA RESEARCH CENTRE (SM-113), La Spezia, Italy, 1987.
- [31] Jensen F.B and Ferla M.C. *SNAP: THE SACLANTCEN NORMAL-MODE ACOUSTIC PROPAGATION MODEL*. SACLANT UNDERSEA RESEARCH CENTRE (SM-121), La Spezia, Italy, 1979.
- [32] Abramowitz M. and Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York.
- [33] Abellanas L. and Spiegel M. R. *Fórmulas e Tabelas de Matemática Aplicada*. Ed. McGraw Hill, Madrid, 1989.
- [34] Gray A. and Mathews G. B. *Bessel Functions and their applications in Physics*. Ed. Inostrannaya Literatura, Moscow (in russian), 1953.
- [35] Prudnikov A. P., Brytchkov Yu. A., and Maritchev O. I. *Integrals and Series: additional chapters*. Ed. Nauka, Moscow (in russian), 1986.
- [36] Samarskiy A. A. *Theory of Differential Schemes*. Ed. Nauka, Moscow (in russian), 1989.
- [37] Ilin V. A., Sadovnichiy V. A., and Sendov Bl. Kh. *Mathematical Analysis I*. Ed. by the Moscow State University, Moscow (in russian), 1985.

# Apêndice I

## Comentários sobre Funções Especiais

### I.1 As funções de Bessel

Por definição [33]:

$$H_n(1,2)(x) = J_n(x) \pm iN_n(x) , \quad (\text{A.I.1})$$

onde

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} , \quad (\text{A.I.2})$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)} , \quad (\text{A.I.3})$$

$$N_n(x) = \lim_{n \rightarrow p} \frac{J_p(x) \cos \pi p - J_{-p}(x)}{\sin \pi p} , \quad (\text{A.I.4})$$

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

e

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx , \quad (\text{A.I.5})$$

sendo  $H_n^{(1,2)}(x)$  as funções de Hankel de primeira e segunda espécie,  $J_n(x)$  e  $N_n(x)$  funções de Bessel de primeira e segunda espécie (  $N_n(x)$  também é conhecida como função de Neumann ou de Weber ), e  $\Gamma(\alpha)$  a função Gama de Euler. Eis algumas fórmulas recorrentes [34]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^n y_n(x)) &= x^n y_{n-1}(x) , \\ \frac{d}{dx} (x^{n-1} y_n(x)) &= -x^{-n} y_{n+1}(x) , \end{aligned}$$

com  $y_n(x) = J_n(x)$ ,  $N_n(x)$  ou  $H_n^{(1,2)}(x)$ , e

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} y_n(x) &= n y_n(x) - x y_{n+1}(x) \quad , \\ x \frac{d}{dx} y_n(x) &= -n y_n(x) + x y_{n-1}(x) \quad , \\ 2 \frac{d}{dx} y_n(x) &= y_{n-1}(x) - y_{n+1}(x) \quad , \\ \frac{d}{dx} y_0(x) &= -y_1(x) \quad , \\ \frac{2n}{x} y_n(x) &= y_{n-1}(x) + y_{n+1}(x) \quad , \end{aligned}$$

$$2^2 \frac{s}{x^n} y_n(x) = y_{n-s}(x) - s y_{n-s+2}(x) + \frac{s(s-1)}{2!} y_{n-s+4}(x) - \dots + (-1)^s y_{n+s}(x) \quad ,$$

com  $y_n(x) = J_n(x)$ ,  $N_n(x)$ .

O comportamento assintótico das funções de Bessel corresponde a:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad , \quad (\text{A.I.6})$$

$$N_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad , \quad (\text{A.I.7})$$

$$H_n^{(1,2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left( \pm i x \mp \frac{i\pi}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) \quad . \quad (\text{A.I.8})$$

## I.2 As funções de Airy

Por definição [32]:

$$Ai(z) = c_1 f(z) - c_2 g(z) \quad , \quad (\text{A.I.9})$$

$$Bi(z) = \sqrt{3} [c_1 f(z) + c_2 g(z)] \quad , \quad (\text{A.I.10})$$

onde

$$c_1 = Ai(0) = Bi(0)/\sqrt{3} = \left[ 3^{2/3} \Gamma(2/3) \right]^{-1} \quad ,$$

$$c_2 = -Ai'(0) = -Bi'(0)/\sqrt{3} = \left[ 3^{1/3} \Gamma(1/3) \right]^{-1} \quad ,$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left( \frac{1}{3} \right)_k \frac{z^{3k}}{(3k)!} \quad , \quad (\text{A.I.11})$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left( \frac{2}{3} \right)_k \frac{z^{3k+1}}{(3k+1)!} \quad , \quad (\text{A.I.12})$$

$$\left( \alpha + \frac{1}{3} \right)_0 = 1 \quad ,$$

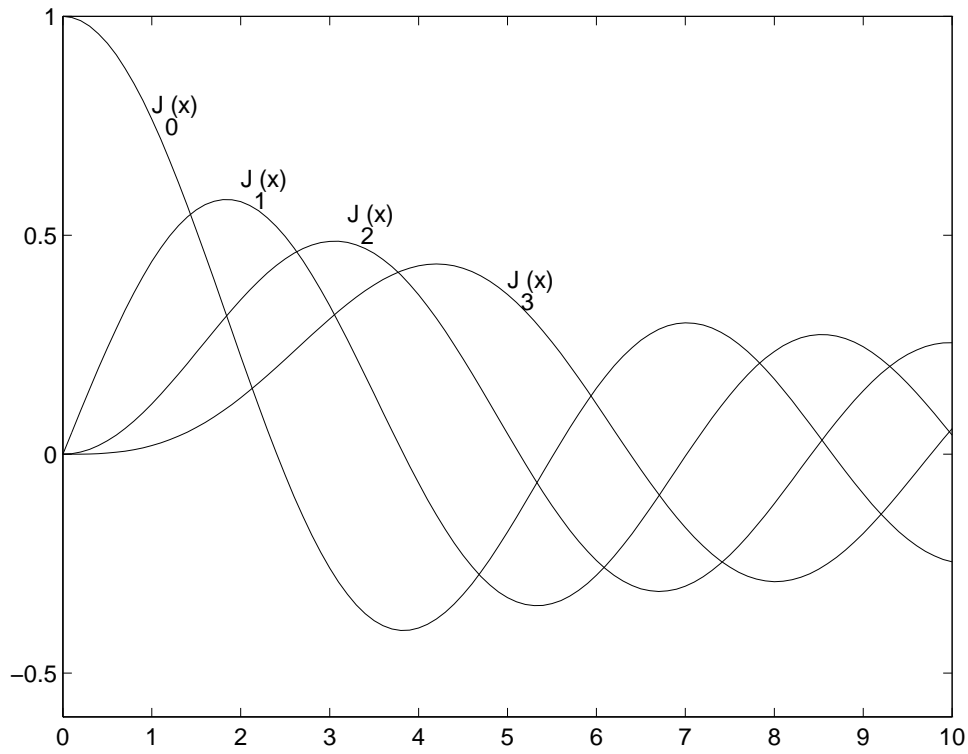


Figura I.1: Funções de Bessel  $J_n(x)$ .

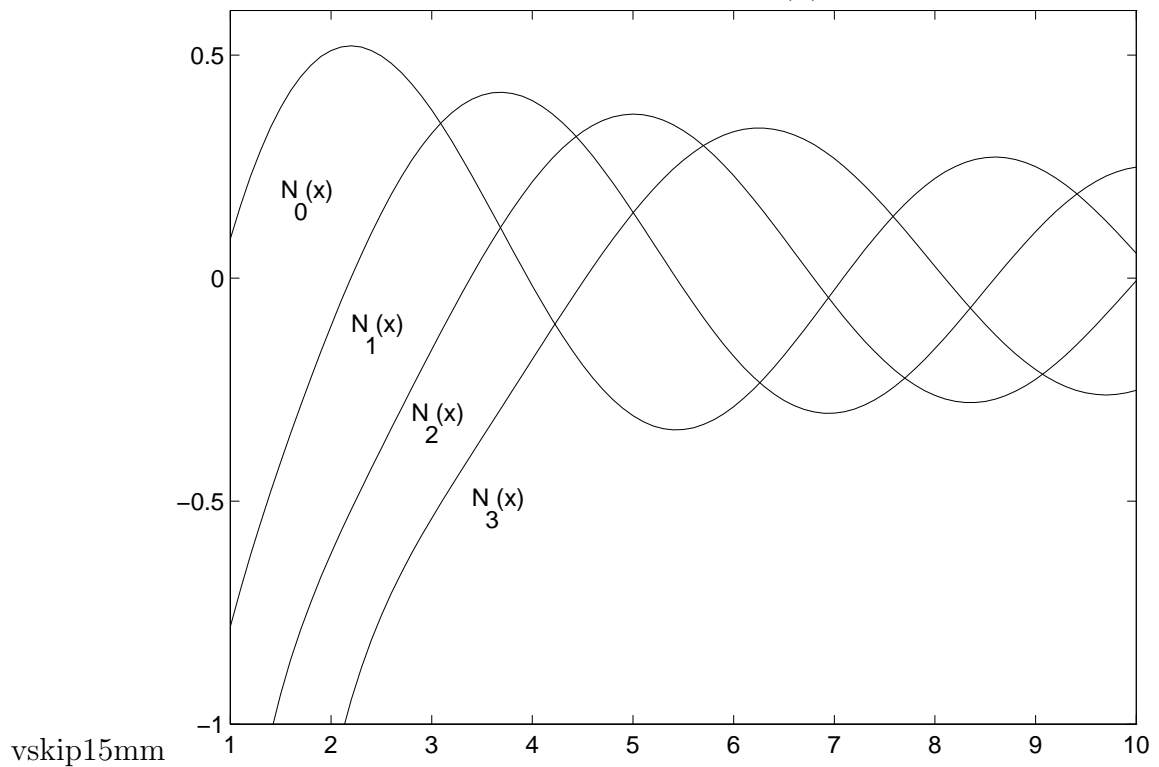


Figura I.2: Funções de Neumann  $N_n(x)$ .

$$3^k \left( \alpha + \frac{1}{3} \right)_k = (3\alpha + 1)(3\alpha + 4) \dots (3\alpha + 3k - 2),$$

$\forall \alpha$  e  $k = 1, 2, 3, \dots$

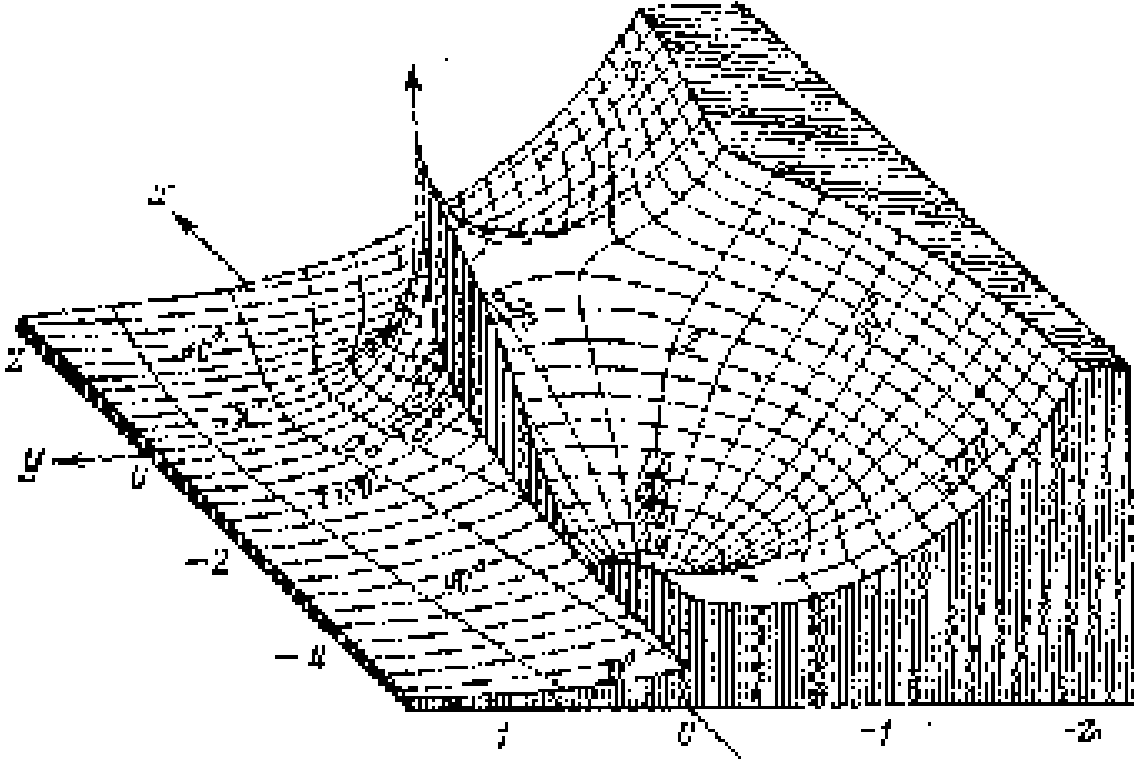


Figura I.3: Função de Hankel  $H_0^{(1)}(z)$  (Ref. [37]).

Eis alguns integrais de produtos de funções de Airy [35]:

$$\int y_1 y_2 dx = x y_1 y_2 - y_1' y_2', \quad (\text{A.I.13})$$

$$\int y_1' y_2 dx = \frac{1}{2} (y_1 y_2 + x y_1' y_2 - x y_1 y_2'), \quad (\text{A.I.14})$$

$$\int y_1' y_2' dx = \frac{1}{3} (y_1' y_2 + y_1 y_2' + x y_1' y_2' - x^2 y_1 y_2), \quad (\text{A.I.15})$$

$$\int x y_1 y_2 dx = \frac{1}{6} (y_1' y_2 + y_1 y_2' - 2x y_1' y_2' + 2x^2 y_1 y_2), \quad (\text{A.I.16})$$

$$\int x y_1' y_2 dx = \frac{1}{4} (2y_1' y_2' + x^2 y_1' y_2 - x^2 y_1 y_2'), \quad (\text{A.I.17})$$

$$\int x y_1' y_2' dx = \frac{1}{5} \left[ \frac{3}{2} (x y_1' y_2 + x y_1 y_2' - y_1 y_2) + x^2 y_1' y_2' - x^3 y_1 y_2 \right], \quad (\text{A.I.18})$$

onde  $y_i(x) = a_i Ai(x) + b_i Bi(x)$  e  $i = 1, 2$ .

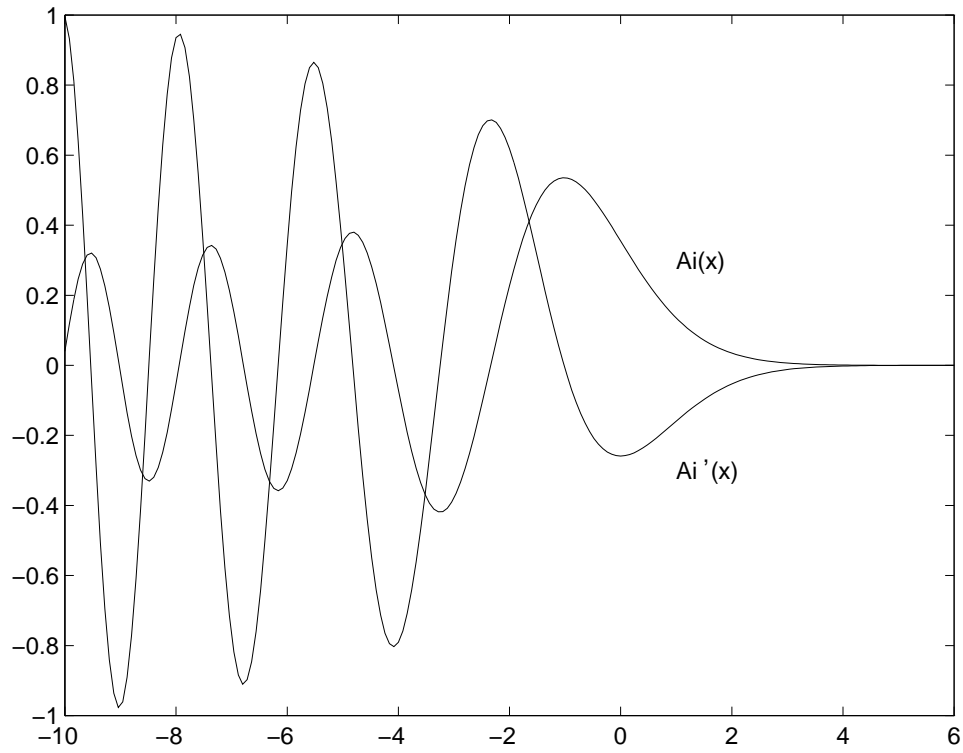


Figura I.4: Função de Airy  $Ai(x)$  e a sua derivada.

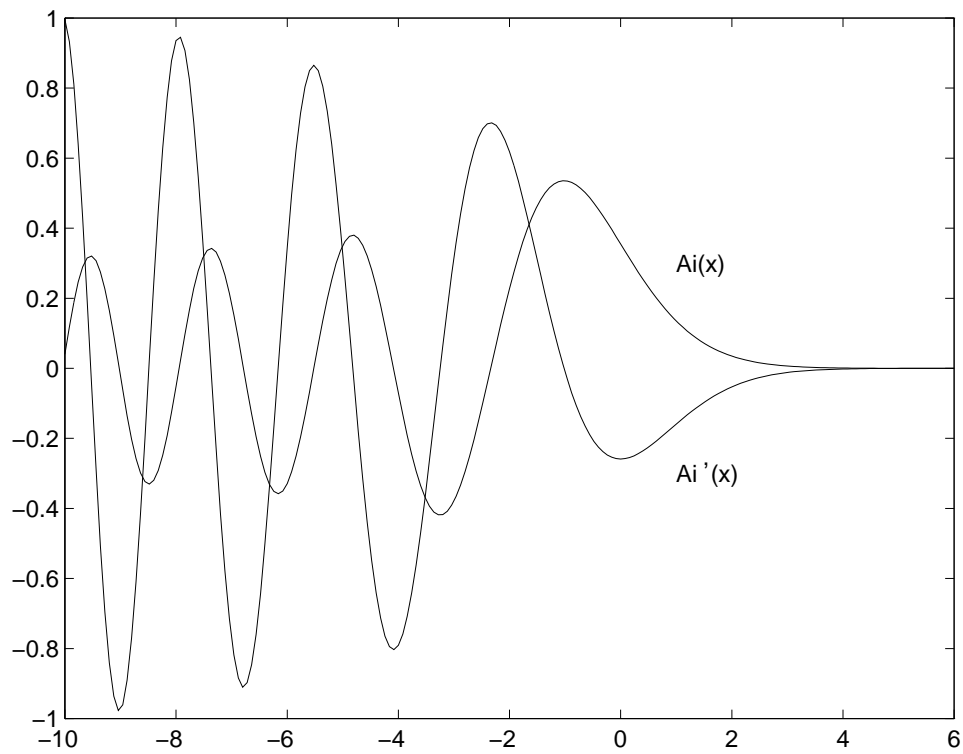


Figura I.5: Função de Airy  $Bi(x)$  e a sua derivada.



# Apêndice II

## Métodos Numéricos usados nos modelos de propagação

### II.1 O método de Crank–Nicolson

Analisemos a seguinte ED [36]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) ,$$

onde

$$0 < x < 1 ,$$

$$0 < t < T ,$$

com condições:

$$u(x, 0) = u_0(x) ,$$

$$u(0, t) = u_1(t) ,$$

$$u(1, t) = u_2(t) .$$

Introduzamos as malhas:

$$\varpi_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\} ,$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, J\} ,$$

onde  $h = 1/N$  e  $\tau = T/J$ . Aproximando a ED com ajuda de diferenças finitas podemos obter o esquema diferencial:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda \left( y_i^{j+1} + y_i^j \right) + \varphi_i^j , \quad (\text{A.II.1})$$

onde:

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+1/2}) ,$$

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{1}{2}\tau ,$$

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) ,$$

com condições:

$$y_0^j = u_1^j ,$$

$$y_N^j = u_2^j ,$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i) .$$

Podemos reescrever a Eq.(A.II.1) na forma:

$$A_i \hat{y}_{i-1} - C_i \hat{y}_i + A_{i+1} \hat{y}_{i+1} = -F_i , \quad (\text{A.II.2})$$

onde:

$$A_i = \frac{\tau a_i}{2h^2} ,$$

$$C_i = A_i + A_{i+1} + 1 ,$$

$$F_i = \left( 1 - \frac{\tau}{2h^2} (a_i + a_{i+1}) \right) y_i + \frac{\tau}{2h^2} (a_i y_{i-1} + a_{i+1} y_{i+1}) + \tau \varphi_i ,$$

$$\hat{y} = y^{j+1} ,$$

$$\hat{y}_0 = u_1(t_{j+1}) ,$$

$$\hat{y}_N = u_2(t_{j+1}) .$$

O método de resolução da Eq.(A.II.2) encontra-se na segunda parte deste apêndice.

## II.2 O método de Galerkin

Analisemos a seguinte ED [36]:

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{du}{dx} \right) + r(x) \frac{du}{dx} - q(x)u = -f(x) ,$$

onde  $K(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  e  $0 < x < 1$ .

Seja  $V_{N-1}$  um espaço de dimensão finita, com uma base  $\{\eta_i^{(N-1)}\}$   $i = 1, 2, \dots, N-1$ , em que  $N$  representa o número de pontos contidos na malha  $\varpi_h$ :

$$\varpi_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = 1\} .$$

Como base de  $V_{(N-1)}$  escolhamos as funções:

$$\eta_i(x) = \eta(x - x_i) h \quad i = 1, 2, \dots, N-1 ,$$

em que:

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & s < -1, s > 1 \\ 1 + s & -1 < s < 0 \\ 1 - s & 0 < s < 1 \end{cases} .$$

De acordo com esta definição:

$$\frac{d\eta_i}{dx} = \begin{cases} 0 & x < x_{i-1}, x > x_{i+1} \\ 1/h & x_{i-1} < x < x_i \\ -1/h & x_i < x < x_{i+1} \end{cases} .$$

Procuremos uma solução aproximada  $u_{N-1}$  da ED da forma:

$$u_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \eta_i ,$$

em que os coeficientes desconhecidos  $y_i$  serão escolhidos de maneira a satisfazer a condição:

$$(Au_{N-1} - f, \eta_i) = 0 , \tag{A.II.3}$$

onde

$$A = \frac{d}{dx} \left( K \frac{d}{dx} \right) + r(x) \frac{d}{dx} - q(x) .$$

Podemos escrever explicitamente a Eq.(A.II.3) na forma:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} y_j - \beta_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (\text{A.II.4})$$

onde:

$$\alpha_{ij} = \int_0^1 \left( K(x) \frac{d\eta_i}{dx} \frac{d\eta_j}{dx} - r(x) \frac{d\eta_i}{dx} \eta_j(x) + q(x) \eta_i \eta_j \right) dx ,$$

$$\beta_i = \int_0^1 f(x) \eta_i(x) dx ,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N-1 .$$

Quando  $j \neq i-1, i, i+1$  tem-se que  $\alpha_{ij} = 0$ . Se introduzirmos a notação:

$$a_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x) dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x) (x_i - x_{i-1})(x_i - x) dx ,$$

$$b_i^- = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r(x) (x_i - x_{i-1}) dx = \int_{-1}^0 r(x_i + sh) (1+s) ds ,$$

$$b_i^+ = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x) (x_{i+1} - x) dx = \int_0^1 r(x_i + sh) (1-s) ds ,$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) (x - x_{i-1}) + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) (x_{i+1} - x) dx ,$$

então podemos reescrever a Eq.(A.II.4) como um esquema diferencial standard:

$$\frac{1}{h^2} [a_{i+1} (y_{i+1} - y_i) - a_i (y_i - y_{i-1})] + b_i^- \frac{1}{h} (y_i - y_{i-1}) + b_i^+ \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i) - d_i y_i = -\varphi_i ,$$

com condições  $y_0 = 0$ ,  $y_N = 0$  e de estrutura semelhante à Eq.(A.II.2). Para o cálculo dos  $y_i$  podemos usar a relação recorrente:

$$y_i = \dot{\alpha}_{i+1} y_{i+1} + \dot{\beta}_{i+1} ,$$

onde:

$$\dot{\alpha}_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \dot{\alpha}_i A_i} ,$$

$$\dot{\beta}_{i+1} = \frac{a_i \dot{\beta}_i + \varphi_i}{C_i - \dot{\alpha}_i A_i},$$

com  $\dot{\alpha}_1 = \dot{\beta}_1 = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , e:

$$A_i = \frac{1}{h^2} (a_i - hb_i^-),$$

$$C_i = \frac{1}{h^2} (a_{i+1} + a_i + hb_i^+ - hb_i^- + d_i),$$

$$B_i = \frac{1}{h^2} (a_{i+1} + hb_i^+).$$



## Apêndice III

# Métodos para o cálculo das raízes duma função

### III.1 O método de bissecção

Toda a função contínua no intervalo  $[a, b]$  para a qual é válido que  $f(a) \times f(b) < 0$  deve possuir, pelo menos, um zero no interior do mesmo intervalo. Consideremos um caso particular em que  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$  e  $f(x)$  possui uma única raiz no intervalo em questão. Construamos os intervalos  $[a, c^*]$  e  $[c^*, b]$  onde  $c^* = (a + b)/2$ . Se  $f(a) \times f(c^*) < 0$  então o zero da função deverá encontrar-se no intervalo  $[a, c^*]$ , o qual pode ser novamente dividido ao meio de forma a comparar a mudança de sinal nos extremos. Se, pelo contrário, a mudança de sinal tiver lugar no intervalo  $[c^*, b]$ , então dividiremos este último em duas partes, determinando novamente em qual dos subintervalos acontece a mudança de sinal. Seguidamente dividimos uma vez mais o subintervalo em duas partes e assim por diante. Este procedimento (o “enquadramento” do zero [37]) pode ser repetido tantas vezes quanto o necessário, de acordo com os requisitos de precisão e a menos que  $f(c^*) = 0$ , o que significa que encontramos “acidentalmente” o zero procurado.

## III.2 Método das aproximações sucessivas ( ou de iteração)

Consideremos o problema de determinar as raízes da equação [37]:

$$x = F(x) . \quad (\text{A.III.1})$$

Para simplificar consideremos que no intervalo  $[a, b]$  existe um único zero e que  $absF'(x) \leq \alpha < 1, \forall x \in [a, b]$ . Calculemos então:

$$x_1 = F(a) ,$$

e

$$\hat{x}_1 = F(b) .$$

Se  $x_1 \in [a, b]$  então podemos calcular por recorrência os valores:

$$x_{n+1} = F(x_n) , \quad (\text{A.III.2})$$

que deverão convergir para a raíz da equação. Se  $x_1 \notin [a, b]$  então faremos  $x_1 = \hat{x}_1$  e podemos usar novamente Eq.(A.III.2), tantas vezes quanto for necessário.

## III.3 Método das cordas

Consideremos o problema de determinar a raíz ( única ) da equação [37]

$$f(x) = 0 , \quad (\text{A.III.3})$$

no intervalo  $[a, b]$ , sendo  $f'_0(x) > 0$  e não decrescente no interior do mesmo. Consideremos as equações:

$$x = F(x) \quad , \quad F(x) = x - (b - x) \frac{f(b)}{f(b) - f(a)} . \quad (\text{A.III.4})$$

Não é difícil ver que as raízes das Eq.(A.III.3) e Eq.(A.III.4) coincidem, razão pela qual podemos considerar que as equações dadas são equivalentes no intervalo  $[a, b]$ . Para resolver a Eq.(A.III.4) podemos usar o método de iteração, fazendo  $x_1 = F(a)$  e calculando os  $x_{n+1}$  com ajuda da Eq.(A.III.2). Pode demonstrar-se que a sucessão  $\{x_n\}$  é não decrescente e converge para a raiz da Eq.(A.III.3).

### III.4 Método das tangentes ( ou método de Newton )

Para o problema exposto no alínea anterior consideremos as equações [37]:

$$x = F(x) \quad , \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

Façamos então

$$x_1 = F(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} ,$$

e calculemos os  $x_{n+1}$ , por recorrência, pela fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Uma vez mais pode demonstrar-se que a sucessão  $\{x_n\}$  converge para a raiz procurada.