

Modelação acústica submarina de alta frequência baseada em traçamento de raios: revisão teórica e aplicações actuais

Orlando Camargo Rodríguez, Paulo Santos, Sérgio Manuel Machado Jesus
Instituto de Sistemas e Robótica/Universidade do Algarve
Campus de Gambelas, 8005-139 Faro, Portugal.

Resumo: nos últimos anos a evolução dos sistemas electrónicos de processamento de sinal, que combinam uma alta potência de cálculo com um tamanho reduzido, tem permitido o desenvolvimento de sistemas acústicos submarinos que operam a altas frequências (acima de 1 kHz); tais sistemas permitem o processamento eficiente do sinal recebido em antenas com sistemas simples, ou compostos, de hidrófonos. Em paralelo com a vertente de engenharia aplicada tem-se assistido ao reviver do interesse de modelação, relacionada com a utilização de modelos de traçamento de raios; tais modelos permitem a modelação a altas frequências com um tempo de cálculo, compatível com as necessidades de um sistema que deve responder em tempo real. O intenso desenvolvimento das aplicações e dos modelos não tem sido porém acompanhado pela uniformização teórica das diferentes aspectos da modelação, o que dificulta o desenvolvimento de aplicações dos modelos em simulações e em dados reais. Os objectivos principais deste documento consistem em apresentar uma revisão teórica dos modelos de traçamento de raios, em abordar alguns dos problemas numéricos envolvidos na aplicação dos modelos, e em mostrar aplicações concretas, baseadas nos modelos TRACE e TRACEO actualmente em desenvolvimento no SiPLAB.

1 Introdução

Na actualidade os sistemas acústicos submarinos podem operar a altas frequências, e oferecem desempenhos de potência de cálculo e de tamanho, que facilitam o desenvolvimento de sistemas eficientes de processamento, transmissão e recepção de sinal acústico submarino. Em paralelo com a vertente de engenharia aplicada verifica-se um reviver do interesse pelos modelos de traçamento de raios, os quais permitem a modelação a altas frequências com tempos de cálculo que são compatíveis com as necessidades de um sistema que deve responder em tempo real. Tal desenvolvimento não tem sido acompanhado pela uniformização teórica da teoria de traçamento de raios; verifica-se na literatura a existência de abordagens ora baseadas nas equações clássicas da Eikonal, ora baseadas na aplicação do formalismo Hamiltoniano, com integração seja ao longo do raio de propagação, seja ao longo da distância de propagação. Os objectivos principais deste documento consistem em

apresentar uma revisão teórica dos modelos de traçamento de raios, seguido da discussão de alguns dos problemas numéricos envolvidos na aplicação dos modelos; para complementar essa discussão mostram-se resultados concretos nas aplicações de barreiras acústicas, localização de fontes com antenas de sensores vectoriais e em inversão geoacústica, obtidos com os modelos TRACE e TRACEO, que se encontram actualmente em desenvolvimento no SiPLAB. O presente documento encontra-se dividido em quatro secções. Na primeira é introduzida uma revisão teórica da aproximação do traçamento de raios no contexto da acústica submarina; a segunda secção discute algumas das questões numéricas mais relevantes para a resolução das equações diferenciais envolvidas no traçamento de raios; na terceira secção são apresentadas algumas aplicações concretas dos modelos de traçamento de raios TRACE e TRACEO, desenvolvidos pelo SiPLAB e na quarta secção são apresentadas as conclusões gerais da aplicabilidade do método.

2 Teoria

2.1 A equação acústica de onda

O ponto de partida para a discussão do traçamento de raios é dado pela equação acústica de onda que no caso de uma coluna de água com densidade constante pode ser escrito na forma

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = s(t) , \quad (1)$$

onde $p(t)$ representa a pressão da onda acústica e $s(t)$ representa o sinal emitido. Aplicando o operador de Fourier aos dois lados da Eq.(1) é possível obter a equação de Helmholtz:

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] P(\omega) = S(\omega) , \quad (2)$$

onde

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt ,$$

e

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt .$$

Aplicando a aproximação de ondas planas é possível escrever que [1]

$$P(\omega) = A e^{i\omega\tau} , \quad (3)$$

onde A representa uma amplitude de onda que varia lentamente, enquanto que $\omega\tau$ representa uma fase de rápida variação; substituindo a aproximação na forma homogénea da Eq.(2), separando a parte real e a parte imaginária e aplicando a aproximação de alta frequência

$$\frac{\nabla^2 A}{A} \ll k^2$$

(onde $k = \omega/c$) é possível obter a equação da Eikonal:

$$(\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2} \quad (4)$$

e a equação de transporte:

$$2(\nabla A \cdot \nabla\tau) + A\nabla^2\tau = 0 . \quad (5)$$

As secções que se seguem discutem em detalhe as Eqs.(4)–(5).

2.2 Solução da equação da Eikonal

A Eq.(4) pode ser escrita na forma

$$|\nabla\tau| = \frac{1}{c} , \quad (6)$$

podendo ser simplificada como

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c} , \quad (7)$$

onde ds representa o diferencial da distância percorrida pela onda propagante. Segue-se então que a quantidade

$$d\tau = \frac{ds}{c} , \quad (8)$$

pode ser interpretada como o tempo de percurso, gasto pela onda após a sua propagação numa distância ds . Para a propagação entre dois pontos A e B o tempo total de percurso corresponde então a

$$\tau = \int_A^B \frac{ds}{c} . \quad (9)$$

2.2.1 O princípio de Fermat e o formalismo Lagrangiano

Com base no formalismo Lagrangiano é possível escrever a Eq.(9) na forma

$$\tau = \int_A^B L ds , \quad (10)$$

onde L representa o Lagrangiano do sistema:

$$L = \frac{1}{c} . \quad (11)$$

No contexto deste formalismo o Lagrangiano dever ser representado como uma função das coordenadas e velocidades generalizadas [2]:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{c} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} , \quad (12)$$

onde

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{ds}.$$

Desta maneira, a perturbação no tempo de percurso corresponde a

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \int_A^B \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] + \left[\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right] + \left[\frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta \dot{z} \right] \right\} ds = \\ &= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \delta z}_{=0} \Big|_A^B + \\ &+ \int_A^B \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x + \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \right] \delta y + \left[\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) \right] \delta z \right\} ds. \end{aligned}$$

De acordo com o princípio de Fermat

$$\delta\tau = 0,$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Por outro lado, usando a Eq.(12) é possível obter que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} L = L \dot{x} = \frac{1}{c} \frac{dx}{ds}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} L = L \dot{y} = \frac{1}{c} \frac{dy}{ds}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} L = L \dot{z} = \frac{1}{c} \frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

Desta maneira, é possível concluir que a solução da equação da Eikonal requer a solução do sistema de equações

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{c} \right), \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{c} \right), \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{c} \right). \tag{14}$$

2.2.2 A lentidão do som

O inverso da velocidade do som aparece de maneira sistemática no sistema Eq.(14). O sistema de equações pode ser simplificado definindo o inverso da velocidade do som como uma grandeza própria, a *lentidão* do som σ :

$$\sigma = \frac{1}{c} . \quad (15)$$

Com esta nova grandeza o sistema Eq.(14) transforma-se em

$$\frac{d}{ds} \left(\sigma \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} , \quad \frac{d}{ds} \left(\sigma \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial y} , \quad \frac{d}{ds} \left(\sigma \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial z} . \quad (16)$$

Uma simplificação adicional pode ser alcançada introduzindo o vector de lentidão do som:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z] . \quad (17)$$

É possível escrever então que

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sigma_x}{\sigma} , \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\sigma_y}{\sigma} , \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\sigma_z}{\sigma} , \quad (18)$$

o que transforma o sistema Eq.(16) em

$$\frac{d\sigma_x}{ds} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} , \quad \frac{d\sigma_y}{ds} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} , \quad \frac{d\sigma_z}{ds} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} . \quad (19)$$

2.2.3 Correntes oceânicas

A equação da Eikonal pode ser estendida ao caso de uma coluna de água perturbada pela presença de correntes oceânicas. O sistema de equações pode ser escrito de forma compacta vectorialmente como[3]

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{c^2}{\Omega} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} , \quad (20)$$

e

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\tau} = -\frac{\Omega}{c} \boldsymbol{\nabla} c - \boldsymbol{\sigma} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{v} , \quad (21)$$

onde \mathbf{v} representa o vector de corrente e

$$\Omega = \frac{c}{c(1 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma})} . \quad (22)$$

2.2.4 Simetria cilíndrica (caso bidimensional)

Num sistema com simetria cilíndrica (ver Fig.1) a equação da Eikonal pode ser deduzida directamente da Eq.(18) e da Eq.(19), pela simples substituição de x com r e ignorando as derivativas envolvendo a coordenada y :

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\sigma_r}{\sigma} , \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\sigma_z}{\sigma} ; \quad (23)$$

nestas condições o sistema Eq.(16) transforma-se em

$$\frac{d\sigma_r}{ds} = \frac{\partial\sigma}{\partial r} , \quad \frac{d\sigma_z}{ds} = \frac{\partial\sigma}{\partial z} . \quad (24)$$

Na Eq.(24) $\sigma_r(s)$ e $\sigma_z(s)$ representam, respectivamente, as componentes horizontal e vertical components da lentidão do som:

$$\boldsymbol{\sigma}(s) = [\sigma_r(s) , \sigma_z(s)] .$$

O diferencial do tempo de percurso pode ser escrito na forma

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sigma ds = \frac{\sigma^2}{\sigma_r} dr .$$

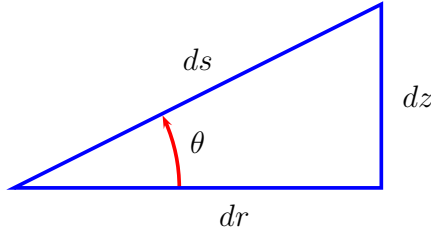


Figure 1: Inclinação do raio, θ , passo do raio ds e passos horizontal e vertical dr e dz no caso de simetria cilíndrica; as diferentes grandezas estão ligadas entre si através das relações

$$dr = \cos\theta ds , \quad dz = \sin\theta ds , \quad \tan\theta = dz/dr , \quad ds = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2} .$$

O sistema de equações dado por Eq.(23) e Eq.(24) pode ser reescrito facilmente na sua forma clássica como [4]

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= c\sigma_r(s) , & \frac{d\sigma_r}{ds} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial r} , \\ \frac{dz}{ds} &= c\sigma_z(s) , & \frac{d\sigma_z}{ds} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial c}{\partial z} . \end{aligned} \quad (25)$$

Quando a velocidade do som depende apenas da profundidade a lentidão horizontal é preservada:

$$\frac{d\sigma_r}{ds} = 0 ,$$

o que em combinação com umas fronteiras planas permite obter a forma clássica da lei de Snell:

$$\sigma_r(s) = \frac{\cos \theta(s)}{c(s)} = \text{constante} . \quad (26)$$

O conjunto de condições iniciais necessário para resolver a equação bidimensional da Eikonal é dado por

$$r(0) = r_s , \quad z(0) = z_s , \quad \sigma_r(0) = \frac{\cos \theta_s}{c_s} , \quad \sigma_z(0) = \frac{\sin \theta_s}{c_s} ,$$

onde θ_s representa o ângulo de emissão, $[r_s, z_s]$ é a posição da fonte e c_s é a velocidade do som na posição da fonte.

O sistema de equações da Eikonal pode ser manipulado de maneira a mudar a variável de integração de s para r [3]:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\sigma_z}{\sigma_r} , \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma}{\sigma_r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} , \quad \frac{d\sigma_z}{dr} = \frac{\sigma}{\sigma_r} \frac{\partial \sigma}{\partial z} , \quad (27)$$

ou

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\sigma_z}{\sigma_r} , \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{1}{c^3 \sigma_r} \frac{\partial c}{\partial r} , \quad \frac{d\sigma_z}{dr} = -\frac{1}{c^3 \sigma_r} \frac{\partial c}{\partial z} , \quad (28)$$

e

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{\sigma^2}{\sigma_r} . \quad (29)$$

2.2.5 O formalismo Hamiltoniano

No contexto do formalismo Hamiltoniano o tempo de percurso pode ser escrito na forma

$$\tau = \int_A^B (\sigma_x \dot{x} + \sigma_y \dot{y} + \sigma_z \dot{z} - H) ds , \quad (30)$$

onde H representa o Hamiltoniano do sistema:

$$H(x, y, z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \sigma_x \dot{x} + \sigma_y \dot{y} + \sigma_z \dot{z} - \sigma . \quad (31)$$

A perturbação do tempo de percurso passa a ser escrita na forma

$$\delta\tau = \int_A^B [\dot{x}\delta\sigma_x + \sigma_x\delta\dot{x} + \dot{y}\delta\sigma_y + \sigma_y\delta\dot{y} + \dot{z}\delta\sigma_z + \sigma_z\delta\dot{z} - (\dots)] ds$$

onde

$$(\dots) = \frac{\partial H}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial \sigma_y} \delta \sigma_y + \frac{\partial H}{\partial y} \delta y + \frac{\partial H}{\partial \sigma_z} \delta \sigma_z + \frac{\partial H}{\partial z} \delta z .$$

Segue-se então que

$$\delta \tau = \int_A^B [(\dots) + \sigma_x \delta \dot{x} + \sigma_y \delta \dot{y} + \sigma_z \delta \dot{z}] ds .$$

onde

$$(\dots) = \left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_x} \right) \delta \sigma_x - \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \left(\dot{y} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_y} \right) \delta \sigma_y - \frac{\partial H}{\partial y} \delta y + \left(\dot{z} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_z} \right) \delta \sigma_z - \frac{\partial H}{\partial z} \delta z .$$

É possível reparar que

$$\begin{aligned} & \int_A^B (\sigma_x \delta \dot{x} + \sigma_y \delta \dot{y} + \sigma_z \delta \dot{z}) ds = \\ & = \underbrace{\sigma_x \delta x + \sigma_y \delta y + \sigma_z \delta z}_{=0} \Big|_A^B - \int_A^B (\dot{\sigma}_x \delta x + \dot{\sigma}_y \delta y + \dot{\sigma}_z \delta z) ds , \end{aligned}$$

de maneira que a perturbação do tempo de percurso transforma-se em

$$\delta \tau = \int_A^B \left[\begin{aligned} & \left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_x} \right) \delta \sigma_x - \left(\dot{\sigma}_x + \frac{\partial H}{\partial x} \right) \delta x + \\ & \left(\dot{y} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_y} \right) \delta \sigma_y - \left(\dot{\sigma}_y + \frac{\partial H}{\partial y} \right) \delta y + \\ & \left(\dot{z} - \frac{\partial H}{\partial \sigma_z} \right) \delta \sigma_z - \left(\dot{\sigma}_z + \frac{\partial H}{\partial z} \right) \delta z \end{aligned} \right] ds .$$

De acordo com o princípio de Fermat $\delta \tau = 0$, o que permite deduzir o seguinte sistema de equações que devem ser integradas:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \sigma_x} , & \frac{d\sigma_x}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x} , \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \sigma_y} , & \frac{d\sigma_y}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial y} , \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \sigma_z} , & \frac{d\sigma_z}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial z} . \end{aligned} \tag{32}$$

O Hamiltoniano pode ser escrito igualmente de maneira a desenvolver a integração pelo tempo de percurso e substituindo as componentes da lentidão do som com as componentes do número de onda. De facto, tendo em conta que

$$ds = d\tau / \sigma$$

e que

$$k_x = \omega\sigma_x, \quad k_y = \omega\sigma_y, \quad k_z = \omega\sigma_z,$$

é possível obter o Hamiltoniano[5]¹:

$$H = \omega^2 - c^2k^2, \quad (33)$$

(esta equação corresponde ao Hamiltoniano dado pela Eq.(31), multiplicada pelo factor $-\omega^2/\sigma$); o sistema de equações corresponde então a

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial k_x}, & \frac{dk_x}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial k_y}, & \frac{dk_y}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial k_z}, & \frac{dk_z}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}$$

Tal como mostrado previamente o caso bidimensional com simetria cilíndrica pode ser obtido de maneira imediata como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial k_r}, & \frac{dk_r}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial k_z}, & \frac{dk_z}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}$$

Diversas aplicações usam o Hamiltoniano escrito em termos de s ou de r . No primeiro caso e para uma geometria cilíndrica ter-se-ia que

$$H = \sigma_r \dot{r} + \sigma_z \dot{z} - \sigma, \quad (34)$$

associado ao sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \sigma_r}, & \frac{d\sigma_r}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \sigma_z}, & \frac{d\sigma_z}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial z}; \end{aligned}$$

para o segundo caso o Hamiltoniano e o sistema associado de equações corresponde a [6]

$$H = -\sqrt{\frac{1}{c^2} - \sigma_z^2}, \quad (35)$$

and

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial \sigma_z}, \quad \frac{d\sigma_z}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z}.$$

¹A expressão completa para o Hamiltoniano corresponde a

$$H = (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 - c^2k^2,$$

onde \mathbf{v} representa o vector de corrente.

2.3 A equação de transporte

Apesar da sua aparente complexidade a Eq.(5) pode ser resolvida analiticamente, o que permite obter o resultado

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{J/c}} ,$$

onde

$$A_0 = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\cos \theta_s}{c_s}}$$

e J representa o Jacobiano da transformação entre as coordenadas do raio e as coordenadas cilíndricas; de facto, o Jacobiano representa a secção transversal do tubo de raios, que liga a posição da fonte com a posição do hidrófono. Os pontos em que $J = 0$ define as cáusticas do campo de pressão, isto é, correspondem aos pontos do guia de onda onde o campo de pressão acústica é singular.

2.4 Feixes Gaussianos e o sistema de equações dinâmicas do raio

A aproximação de feixes Gaussianos permite ultrapassar as singularidades introduzidas pela Eq.(3), ao substituir os raios da aproximação clássica por feixes cuja amplitude decresce segundo uma curva Gaussiana na perpendicular ao eixo de propagação; nesta aproximação a pressão acústica ao longo do raio pode ser definida como [7, 8]

$$P(s, n) = A \sqrt{\frac{c(s)}{sq(s)}} \times \exp \left[-i\omega \left(\tau(s) + \frac{p(s)}{2q(s)} n^2 \right) \right] , \quad (36)$$

onde n representa a distância normal ao eixo do feixe e A é uma constante de normalização, que pode ser calculada através da expansão de uma fonte pontual num sistema de feixes. Após substituição na Eq.(2) é possível obter novamente o sistema Eq.(4) (que representa agora as coordenadas do eixo central do feixe), assim como o sistema de equações dinâmicas do raio [4, 9, 10]

$$\frac{dq}{ds} = c(s)p(s) \quad , \quad \frac{dp}{ds} = -\frac{c_{nn}}{c^2(s)}q(s) , \quad (37)$$

onde [7]

$$c_{nn} = \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 c}{\partial r \partial z} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right) + \left(\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right)^2 \quad (38)$$

e

$$\left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) = -\sin \theta \quad , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right) = \cos \theta . \quad (39)$$

As condições iniciais para $p(s)$ e $q(s)$ podem ser

$$q(0) = 0 \quad \text{e} \quad p(0) = 1 .$$

Desta maneira, a pressão acústica ao longo do raio pode ser calculada como

$$P(s) = \phi_r \frac{A(s)}{\sqrt{s}} e^{-i[\omega\tau(s) - \phi_c]} , \quad (40)$$

onde a amplitude é dada por [10]

$$A(s) = \left| \frac{c(s) \cos \theta_s}{q(s)} \right|^{1/2} . \quad (41)$$

O factor $A(s)/\sqrt{s}$ representa a amplitude do raio induzida pelo espalhamento cilíndrico; deve ser multiplicado pelo factor de decaimento ϕ_r de maneira a ter em conta as perdas de energia induzidas pelas reflexões nas fronteiras do guia de onda; o factor ϕ_c representa a variação da fase induzida pela formação das cáusticas. Os dois factores são discutidos na secção que se segue.

2.5 Cáusticas e reflexões nas fronteiras

O factor ϕ_c na Eq.(40) pode ser escrito como

$$\phi_c = \frac{\pi}{2} n_c , \quad (42)$$

onde n_c é o número de vezes que se verifica uma mudança de sinal em $q(s)$ [9]. O factor de decaimento é dado por

$$\phi_r = \prod_{i=1}^{n_r} R_i , \quad (43)$$

onde n_r representa o número total de reflexões e R_i é o coeficiente de reflexão na i -ésima reflexão. O caso $n_r = 0$ representa a situação em que o raio é apenas refractado, o que corresponde ao factor $\phi_r = 1$. Adicionalmente, a interface coluna de água/ — ar pode ser caracterizada com o coeficiente $R_i = -1$, enquanto que à interface coluna de água — meio totalmente rígido corresponde o coeficiente $R_i = 1$. No caso de reflexões num meio elástico (ver Fig.2) o coeficiente de reflexão deve ser calculado como [11]:

$$R(\theta) = \frac{D(\theta) \cos \theta - 1}{D(\theta) \cos \theta + 1} , \quad (44)$$

onde

$$D(\theta) = A_1 \left(A_2 \frac{1 - A_7}{\sqrt{1 - A_6^2}} + A_3 \frac{A_7}{\sqrt{1 - A_5/2}} \right) ,$$

$$A_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} , \quad A_2 = \frac{\tilde{c}_{p2}}{c_{p1}} , \quad A_3 = \frac{\tilde{c}_{s2}}{c_{p1}} ,$$

$$A_4 = A_3 \sin \theta , \quad A_5 = 2A_4^2 , \quad A_6 = A_2 \sin \theta , \quad A_7 = 2A_5 - A_5^2 ,$$

$$\tilde{c}_{p2} = c_{p2} \frac{1 - i\tilde{\alpha}_{cp}}{1 + \tilde{\alpha}_{cp}^2} \quad , \quad \tilde{c}_{s2} = c_{s2} \frac{1 - i\tilde{\alpha}_{cs}}{1 + \tilde{\alpha}_{cs}^2} \quad ,$$

$$\tilde{\alpha}_{cp} = \frac{\alpha_{cp}}{40\pi \log e} \quad , \quad \tilde{\alpha}_{cs} = \frac{\alpha_{cs}}{40\pi \log e} \quad ,$$

onde a atenuação é dada em dB/ λ .

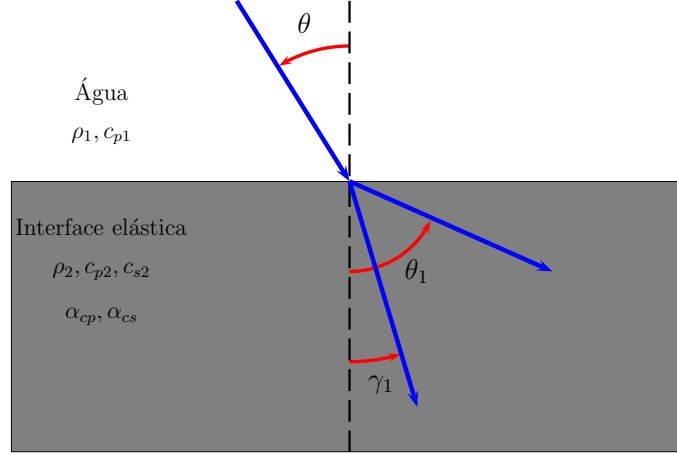


Figure 2: Reflexão do raio num meio elástico.

No caso em que não há atenuação e o ângulo de incidência é inferior ao ângulo crítico

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{c_{p1}}{c_{p2}} \right) \quad (45)$$

o coeficiente de reflexão é real. Regra geral a atenuação é desprezável para os ângulos de reflexão abaixo de θ_c ; adicionalmente, a energia transmitida às ondas transversais do meio elástico é pouco significativa quando os ângulos de incidência são muito reduzidos.

2.6 Feixes Gaussianos geométricos

A influência do feixe na perpendicular ao eixo do raio pode ser calculada usando a aproximação dos feixes Gaussianos geométricos [9, 10]

$$P(s, n) = \phi_r \frac{A(s)}{\sqrt{r(s)}} \phi(s, n) e^{-i[\omega\tau(s, n) - \phi_c]} \quad , \quad (46)$$

onde $\tau(s, n)$ é calculado através de interpolação linear (ver [7]),

$$\phi(s, n) = \begin{cases} \frac{W(s) - n(s)}{W(s)} & \text{para } n(s) \leq W(s) \\ 0 & \text{resto dos casos} \end{cases} \quad , \quad (47)$$

$W(s)$ representa a largura do feixe, definida como

$$W(s) = \left| \frac{q(s)\Delta\theta}{c_s \cos \theta(s)} \right|, \quad (48)$$

$\Delta\theta$ é a separação angular entre os raios e $n(s)$ é a distância normal entre as coordenadas (r, z) do hidrófono e as coordenadas do raio $[r(s), z(s)]$. A pressão acústica induzida pela influência de m raios resulta da superposição da pressão acústica induzida por cada raio:

$$P(r, z) = \sum_{i=1}^m P_m(r, z), \quad (49)$$

onde

$$P_m(r, z) = \phi_r^m \frac{A_m(s)}{\sqrt{r}} \phi_m(s, n) e^{-i[\omega\tau_m(s, n) - \phi_c^m]}. \quad (50)$$

2.7 Velocidade das partículas

A velocidade das partículas do fluido pode ser calculada da pressão acústica através da relação [12]

$$\mathbf{v} = -\frac{i}{\omega\rho} \nabla P, \quad (51)$$

onde ρ representa a densidade da coluna de água e ω é a frequência angular da onda propagante.

3 Questões numéricas

O traçamento de raios requer a solução de um conjunto específico de tarefas, das quais as seguintes podem ser consideradas como mais relevantes:

1. a solução numérica do sistema da equação da Eikonal;
2. a interpolação de diferentes grandezas (perfil do som, superfície e batimetria, etc.) e o cálculo de derivadas;
3. a aplicação da lei de reflexão especular numa fronteira de inclinação arbitrária.

O método de resolução de cada uma destas tarefas é discutido a seguir.

3.1 Solução numérica da equação da Eikonal

O sistema de equações da equação Eikonal pode ser integrado numericamente aplicando um método de Ruge-Kutta de quarta ordem (doravante RK4). Considerem-se por exemplo a Eq.(18) e a Eq.(19). Ambas podem ser escritas de forma compacta como uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{ds} = \mathbf{f}, \quad (52)$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sigma_x/\sigma \\ \sigma_y/\sigma \\ \sigma_z/\sigma \\ \partial\sigma/\partial x \\ \partial\sigma/\partial y \\ \partial\sigma/\partial z \end{bmatrix} \quad (53)$$

A Eq.(52) é integrada com método RK4 usando o seguinte algoritmo:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + [\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4] ds/6 \quad , \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) \quad , \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{f}(t_k + ds/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{K}_1 ds/2) \quad , \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{f}(t_k + ds/2, \mathbf{y}_k + \mathbf{K}_2 ds/2) \quad , \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{f}(t_k + ds, \mathbf{y}_k + \mathbf{K}_3 ds) \quad . \end{aligned} \quad (54)$$

Os passos das coordenadas estão relacionados com o passo do raio através das relações (ver Fig.3):

$$dx = ds \cos \theta \cos \phi \quad , \quad dy = ds \cos \theta \sin \phi \quad , \quad dz = ds \sin \theta \quad ;$$

por outro lado as componentes do vector de lentidão correspondem a

$$\sigma_x = \sigma \cos \theta \cos \phi \quad , \quad \sigma_y = \sigma \cos \theta \sin \phi \quad , \quad \sigma_z = \sigma \sin \theta \quad ,$$

e as condições iniciais podem ser escritas na forma

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \\ \sigma_x(0) \\ \sigma_y(0) \\ \sigma_z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ \cos \theta_s \cos \phi_s / c_s \\ \cos \theta_s \sin \phi_s / c_s \\ \sin \theta_s / c_s \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x(0)/\sigma(0) \\ \sigma_y(0)/\sigma(0) \\ \sigma_z(0)/\sigma(0) \\ \partial\sigma/\partial x(0) \\ \partial\sigma/\partial y(0) \\ \partial\sigma/\partial z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s \cos \phi_s \\ \cos \theta_s \sin \phi_s \\ \sin \theta_s \\ (\partial\sigma/\partial x)_s \\ (\partial\sigma/\partial y)_s \\ (\partial\sigma/\partial z)_s \end{bmatrix} \quad .$$

3.2 Interpolação e cálculo de derivadas

A tarefa de interpolação e de cálculo de derivadas pode ser resolvida numericamente através de uma interpolação baricêntrica parabólica. Esta aproximação pode ser descrita da forma seguinte: considere-se um conjunto de três pontos x_1 , x_2 e x_3 e os valores respectivos da função $f(x_1)$, $f(x_2)$ and $f(x_3)$. Pretende-se interpolar a função e a sua primeira e segunda derivadas num ponto x , posicionado entre x_1 and x_3 (ver Fig.4). A aproximação baricêntrica parabólica pode ser escrita como

$$f(x) = f(x_1) + a_2 (x - x_1) (x - x_3) + a_3 (x - x_1) (x - x_2) \quad . \quad (55)$$

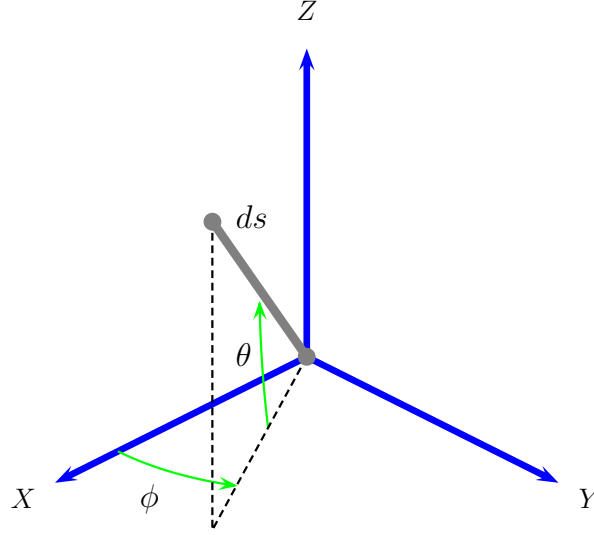


Figure 3: Coordenadas esféricas e passo do raio.

Segue-se desta expressão que

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} .$$

A aproximação para as derivadas corresponde então a

$$\frac{df}{dx} = a_2(2x - x_1 - x_3) + a_3(2x - x_1 - x_2)$$

e

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2(a_2 + a_3) .$$

A aproximação pode ser estendida para incluir mais do que três pontos, ou para a interpolação a duas ou mais dimensões.

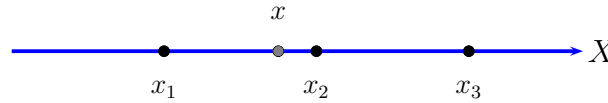


Figure 4: Interpolação baricêntrica unidimensional.

3.3 Reflexão especular na fronteira

A aplicação das leis de reflexão especular numa fronteira com uma inclinação arbitrária pode resultar de difícil aplicação se baseada no cálculo da inclinação do raio incidente e na inclinação da normal no ponto de incidência. Uma aproximação mais eficiente resulta da aplicação da expressão

$$\boldsymbol{\tau}_r = \boldsymbol{\tau}_i + (2 \cos \theta_1) \mathbf{n} , \quad (56)$$

onde \mathbf{n} representa o versor da normal no ponto de incidência, $\boldsymbol{\tau}_i$ é o versor do raio de incidência, $\boldsymbol{\tau}_r$ é o versor do raio na direcção de reflexão e

$$\cos \theta_1 = \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\tau}_i) .$$

Após o cálculo da direcção de reflexão o traçamento do raio pode ser reinicializado “posicionando” a fonte no ponto de incidência e emitindo o raio na direcção de reflexão.

4 Aplicações

O desenvolvimento de aplicações típicas de alta frequências baseou-se na utilização do TRACE e do TRACEO, dois modelos de traçamento de raios actualmente em desenvolvimento no SiPLAB [13]. Os dois modelos estão escritos em Fortran77, e foram concebidos com uma estrutura modular que pode ser facilmente extendida e adaptada a diversas aplicações; os modelos podem ser compilados com o g77, o gfortran ou o g95. A diferença fundamental entre os modelos reside no facto de que o TRACEO admite uma entrada de dados, em que se define um objecto no guia de onda; tal objecto representa uma interface adicional para além das fronteiras do guia de onda (ou seja, da superfície e do fundo). A medida que um determinado raio vai sendo calculado o TRACEO verifica se o raio é reflectido nas fronteiras ou no objecto. Quando tal reflexão é detectada o modelo determina o ponto de intersecção do raio com a interface, a direcção de reflexão, e reinicia o traçamento a partir desse ponto. Neste momento os modelos tem sido utilizados em duas aplicações concretas, nomeadamente para estudos de barreiras acústicas e para estudos de inversão geoacústica, envolvendo a utilização de antenas de sensores vectorias (doravante VSA²).

4.1 Barreiras acústicas

Um objecto que se encontre entre uma fonte e um hidrófono perturba o campo de pressão acústica, seja através do bloqueio ou da redirecção da energia do campo (ver Fig.5); adicionalmente as zonas de interferência constructiva e destructiva são redistribuídas, gerando variações nos níveis de intensidade do campo, que potenciam a detecção de “intrusos” na zona insonificada. Simulações de barreiras acústicas num guia de onda raso (para uma frequência de 5 kHz), usando o TRACE e o TRACEO para modelar o campo sem e com um objecto, indicam que os níveis de detecção alcançados são aceitáveis até meia distância entre o emissor e o receptor[14].

4.2 Antenas de sensores vectoriais

As antenas de sensores vectoriais constituem uma das últimas inovações no campo da acústica submarina. Em contraste com os sistemas de sensores clássicos, que apenas permitem o registo da pressão acústica, as VSA permitem registar o campo de pressão e

²Das siglas em inglês *Vector Sensor Arrays*.

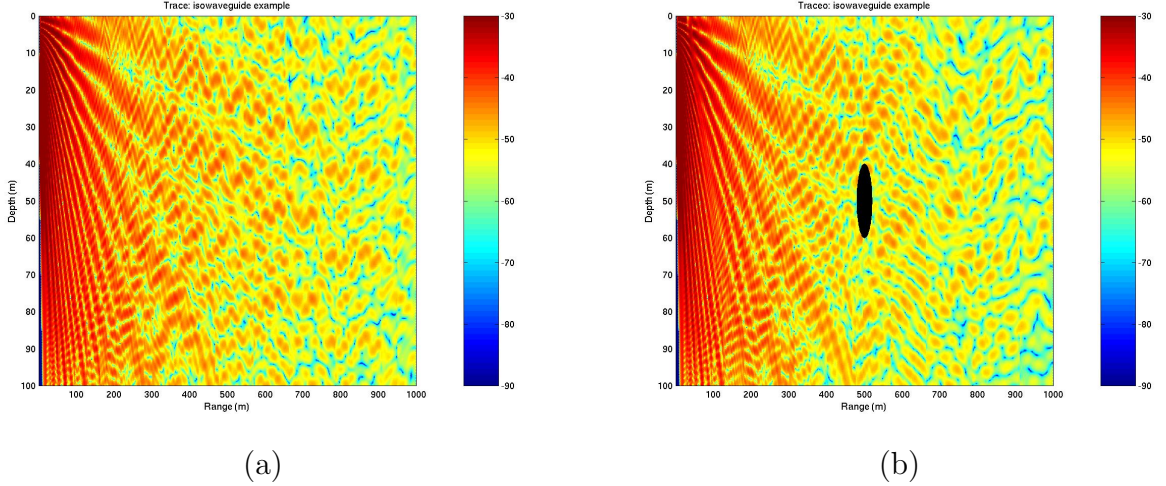


Figure 5: Campo acústico para uma frequência de 500 Hz, num guia de onda com velocidade do som constante; (a) na ausência de obstáculos (calculado com o TRACE); (b) e na presença de um obstáculo (calculado com o TRACEO).

as componentes de velocidade da partícula; o acesso a uma maior quantidade de medidas deve permitir, conseqüentemente, a utilização de um conjunto mais reduzido de sensores em comparação com os que são usados numa antena convencional. As secções que se seguem ilustram as vantagens de utilização das VSA no caso particular (simulado) de localização de uma fonte e no caso real de inversão geoacústica.

4.2.1 Localização de fontes

O problema clássico de localização de fontes pode ser abordado através do cálculo do estimador de Bartlett [15]

$$\mathcal{E}(r, z) = \mathbf{e}^* \mathbf{R} \mathbf{e} , \quad (57)$$

onde \mathbf{e} representa o vector normalizado dos dados de pressão, calculados pelo modelo, \mathbf{R} representa a matriz de covariância dos dados medidos \mathbf{d}

$$\mathbf{R} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{d}_l \mathbf{d}_l^* , \quad (58)$$

* representa a conjugação transposta e L é o número de vezes que o conjunto de dados foi observado. Gerando realizações de \mathbf{e} para diferentes posicionamentos da fonte gera-se uma superfície de ambigüidade, cujo máximo indica a verdadeira posição da fonte. O estimador clássico pode ser extendido aos dados de velocidade da partícula introduzindo a matriz de covariância

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_w \end{bmatrix} \quad (59)$$

onde \mathbf{R}_p , \mathbf{R}_u e \mathbf{R}_w representam as matrizes de covariância calculadas para os dados normalizados de P , u e w , respectivamente. Adicionalmente, o vector gerado pelo modelo pode ser representado na forma

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_p \\ \mathbf{e}_u \\ \mathbf{e}_w \end{bmatrix} \quad (60)$$

onde \mathbf{e}_p , \mathbf{e}_u e \mathbf{e}_w representam os vectores normalizados de p , u e w , respectivamente. A “replica” \mathbf{e} deve ser também normalizada. As vantagens de utilização da VSA quando comparada com uma antenna convencional encontra-se ilustrada na Fig.6. A superfície de ambiguidade de Bartlett foi gerada para uma idealização de um guia de onda profundo, um perfil de Munk, uma frequência de 50 Hz e uma antenna de 33 hidrófonos (posicionados equidistantemente entre a superfície e o fundo). A figura evidencia a ambiguidade significativa na posição da fonte que resulta do cálculo do estimador quando apenas é usado um determinado tipo de informação ($\mathbf{e} = \mathbf{e}_p$, ou $\mathbf{e} = \mathbf{e}_u$, ou $\mathbf{e} = \mathbf{e}_w$). A ambiguidade desaparece no momento em que os três tipos de dados são usados para calcular o estimador.

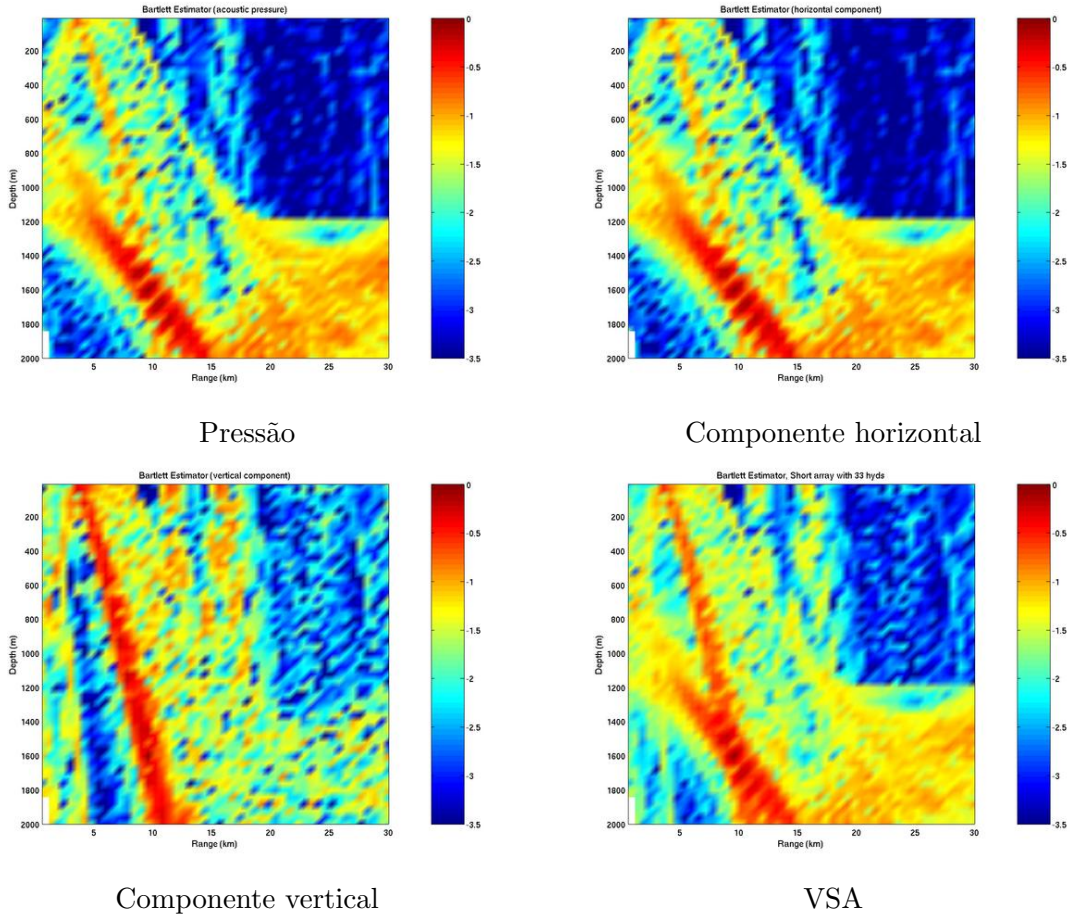


Figure 6: Simulações de comparação entre o Bartlett clássico e o Bartlett VSA para uma antenna com 33 hidrófonos.

4.3 Inversão geoacústica

Os sistemas de VSA podem ser igualmente usados em estudos de inversão geoacústica a altas frequências; neste sentido, a velocidade de cálculo dos modelos de traçamento de raios resulta ser uma característica atractiva para a sua aplicabilidade aos problemas envolvendo altas frequências. A Fig.7 ilustra um conjunto de resultados preliminares, obtidos gerando réplicas de P e de \mathbf{v} com o TRACE [16]. O parâmetro estimado correspondeu à velocidade do som no sedimento. Conjuntamente com o estimador de Bartlett clássico e o Bartlett VSA a estimação recorreu a um estimador de Bartlett baseado na representação dos dados numa base de quaterniões. Tal como mostrado pela figura a estimação baseada na conjugação dos dados de pressão com as componentes da velocidade da partícula reduzem significativamente os níveis de ambiguidade do parâmetro estimado; tal optimização pode ser ainda melhorada se o estimador “convencional” de Bartlett VSA recorrer a uma base de quaterniões. Durante o processamento dos dados reais reparou-se adicionalmente que nalguns casos a estimação com a componente vertical de \mathbf{v} exibia menos ambiguidade do que a estimação VSA. Pensa-se que tal é devido ao facto de que na estimação geoacústica são os raios com maior interacção com o fundo aqueles que “transportam” a maior variedade de informação sobre os parâmetros que é preciso estimar. Esta hipótese de trabalho, embora tenha vindo a ser sustentada em vários ocasiões pelos resultados dos dados processados, permanece de momento uma interessante questão em aberto.

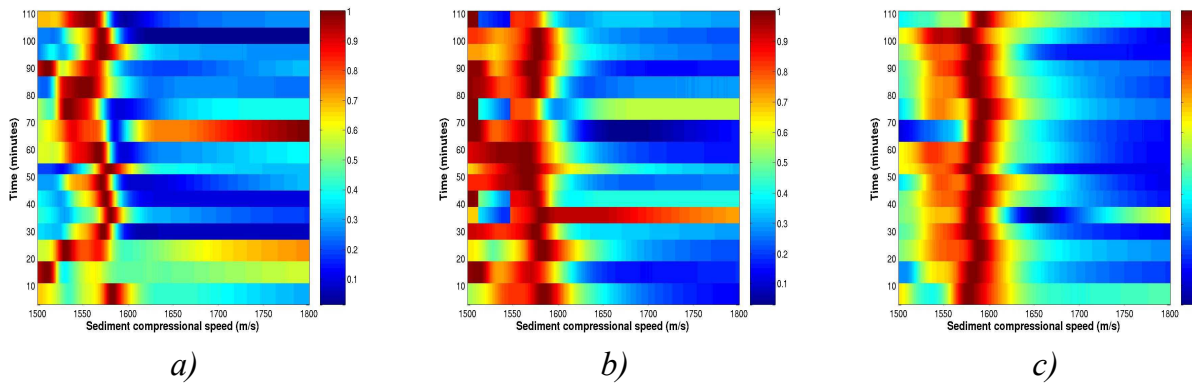


Figure 7: Superfícies de ambiguidade para a velocidade compressional do sedimento ao longo do tempo de recepção (dados da experiência Makai’05): (a) Bartlett clássico; (b) Bartlett VSA; (c) Bartlett VSA numa base de quaterniões.

5 Conclusões

A revisão teórica apresentada no início deste trabalho permite a abordagem coerente das questões teóricas relacionadas com o tratamento de raios, seja em termos das equações clássicas da Eikonal ou em termos do Hamiltoniano, com integração ao longo do percurso

do raio ou da distância de propagação. Adicionalmente, o material apresentado permite também confirmar as vantagens resultantes da utilização dos modelos de traçamento de raios, em aplicações de acústica submarina a altas frequências. Neste sentido, o esforço de desenvolvimento do TRACE e do TRACEO mostra-se recompensado com a qualidade dos resultados obtidos, tanto ao nível das simulações como ao nível dos dados reais. Tal esforço não é no entanto indicador da conclusão do trabalho de desenvolvimento. Perfila-se no futuro a unificação dos dois modelos, num modelo único que possa lidar com o traçamento de raios “passivo” (sem objectos no guia de onda) ou “activo” (com mais do que um objecto). Tal processo de unificação servirá de base para a extensão do modelo para o caso tridimensional.

References

- [1] Buckingham M.J. Ocean acoustic propagation models. Technical Report EUR 13810, Commission of the European Communities, 1991.
- [2] Popov M.M. Ray theory and Gaussian beam method for geophysicists. Technical Report EDUFBA, Universidade Federal da Bahia, 2002.
- [3] Dushaw B.D. and Colosi J.A. Ray Tracing for Ocean Acoustic Tomography. Technical Report APL-UW TM 3-98 December, Applied Physics Laboratory University of Washington, 1998.
- [4] Jensen F., Kuperman W., Porter M., and Schmidt H. *Computational Ocean Acoustics*. AIP Series in Modern Acoustics and Signal Processing, New York, 1994.
- [5] R.M., Riley J.P., and Georges T.M. *HARPO-A versatile three-dimensional Hamiltonian ray-tracing program for acoustic waves in an ocean with irregular bottom*. NOAA, 1986.
- [6] Beron-Vera F.J., Brown M.G., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A., and Zaslavsky G.M. Ray dynamics in a long-range acoustic propagation experiment. *J. Acoust. Soc. America*, 114(1):123–130, 2003.
- [7] Porter M.B. and Bucker H.P. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. *J. Acoust. Soc. America*, 82(4):1349–1359, 1987.
- [8] Porter M. *The KRAKEN normal mode program*. SACLANT UNDERSEA RESEARCH (memorandum), San Bartolomeo, Italy, 1991.
- [9] Porter M. B. and Liu Y-C. Finite-Element Ray Tracing. In *Theoretical and Computational Acoustics, Vol. 2*, World Scientific Publishing Co., 1994.
- [10] Baxley P.A., Bucker H., and Porter M.B. Comparison of beam tracing algorithms. In *Proceedings of the 5th. European Conference on Underwater Acoustics*, Lyon, France, 2000.

- [11] Papadakis P.J., Taroudakis M.I., and Papadakis J.S. Recovery of the properties of an elastic bottom using reflection coefficient measurements. In *Proceedings of the 2nd. European Conference on Underwater Acoustics, Vol. II*, pages 943–948, Copenhagen, Denmark, 1994.
- [12] Schmidt H. *SAFARI, Seismo–Acoustic Fast field Algorithm for Range – Independent environments. User’s Guide*. SACLANT UNDERSEA RESEARCH CENTRE (SM-113), La Spezia, Italy, 1987.
- [13] Rodríguez O.C. The TRACE & TRACEO ray tracing programs. Description available at SiPLAB webpage, May 2008. <http://www.siplab.fct.ualg.pt/models/trace/manual/index.html>.
- [14] Jesus S., Silva A., and Rodríguez O.C. High frequency in underwater acoustics: theory, simulations and experiments. In *Proceedings of ETASVII*, Rio de Janeiro, Brasil, November 2007.
- [15] Porter M. and Tolstoy A. The Matched Field Processing Benchmark Problems. *Journal of Computational Acoustics*, 2(3):161–184, 1994.
- [16] Santos P., Felisberto P., Rodríguez O.C., and Jesus S. Geoacoustic Matched-field Inversion using a Vector Sensor Array. In *Conf. on Underwater Acoustic Measurements*, Nafplion, Greece, 21-26 June 2009.